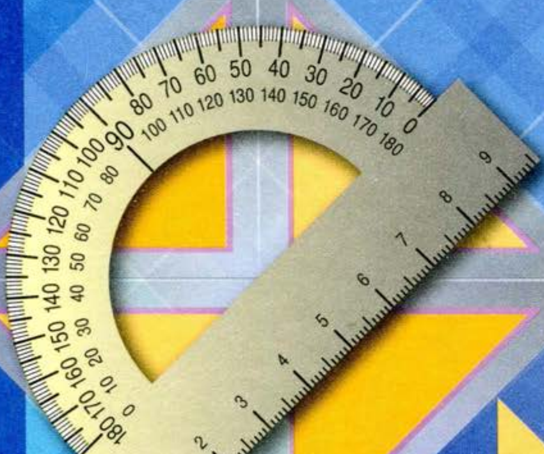
Геометрия

РАБОЧАЯ ТЕТРАДЬ



9

ПРОСВЕЩЕНИЕ
ИЗДАТЕЛЬСТВО

СООТВЕТСТВИЕ МЕЖДУ ПУНКТАМИ УЧЕБНИКА И ЗАДАЧАМИ ТЕТРАДИ

Номера пунктов учебника	Тема	Номера задач тетради
86	Разложение вектора по двум неколлинеарным векторам	1—3
87	Координаты вектора	4—8
88	Связь между координатами вектора и координатами его начала и конца	9—12
89	Простейшие задачи в координатах	13—19
90	Уравнение линии на плоскости	20
91	Уравнение окружности	21—24
92	Уравнение прямой	25—29
93	Синус, косинус, тангенс	30—32
94	Основное тригонометрическое тождество. Формулы приведения	33—35
95	Формулы для вычисления координат точки	36, 37
96	Теорема о площади треугольника	38—40
97	Теорема синусов	41—43
98	Теорема косинусов	44, 45
99	Решение треугольников	46—48
101	Угол между векторами	49
102	Скалярное произведение векторов	50—54
103, 104	Скалярное произведение в координатах. Свойства скалярного произведения векторов	55—60
105	Правильный многоугольник	61—64
106	Окружность, описанная около правильного многоугольника	65—68
107	Окружность, вписанная в правильный многоугольник	69
108	Формулы для вычисления площади правильного многоугольника, его стороны и радиуса вписанной окружности	70, 71
110	Длина окружности	72—77
111	Площадь круга	78—82
112	Площадь кругового сектора	83—85
113, 114	Отображение плоскости на себя. Понятие движения	86—88
116	Параллельный перенос	89
117	Поворот	90—93

Геометрия

РАБОЧАЯ ТЕТРАДЬ

9 класс

Пособие
для учащихся
общеобразовательных
организаций

14-е издание

Москва
«Просвещение»
2014

УДК 373.167.1:514
ББК 22.151я72
Г36

Авторы:
Л.С. Атанасян, В.Ф. Бутузов, Ю.А. Глазков, И.И. Юдина

Рабочая тетрадь является дополнением к учебнику «Геометрия, 7—9» авторов Л.С. Атанасяна и др. и предназначена для организации решения задач учащимися на уроке после их ознакомления с новым учебным материалом. На этом этапе учащиеся делают первые шаги по осознанию нового материала, освоению основных действий с изучаемым материалом. Поэтому в тетрадь включены только базовые задачи, обеспечивающие необходимую репродуктивную деятельность в форме внешней речи. Наличие текстовых заготовок облегчает ученику выполнение действий в развернутой письменной форме, а учителю позволяет осуществить во время урока оперативный контроль и коррекцию деятельности учащихся. Использование данной тетради для организации других видов деятельности (самостоятельных работ, повторения, контроля и т. д.) малоэффективно.

Учебное издание

Атанасян Левон Сергеевич
Бутузов Валентин Федорович
Глазков Юрий Александрович
Юдина Ирина Игоревна

ГЕОМЕТРИЯ

Рабочая тетрадь
9 класс
Пособие для учащихся
общеобразовательных
организаций

Зав. редакцией *Т.А. Бурмистрова*. Редактор *Л.В. Кузнецова*. Младший редактор *Н.В. Ноговицина*. Художники *В.А. Андрианов, О.П. Богомолова, Г.В. Соловьев*. Художественный редактор *О. П. Богомолова*. Компьютерная верстка *Е.А. Стрижевской*. Корректор *А.В. Рудакова*.

Налоговая льгота — Общероссийский классификатор продукции ОК 005-93—953000. Изд. лиц. Серия ИД № 05824 от 12.09.01. Подписано в печать 10.07.13. Формат $70 \times 100^{1}/_{16}$. Бумага офсетная. Гарнитура SchoolBookCSanPin. Печать офсетная. Уч.-изд. л. 2,15. Тираж 25 000 экз. Заказ № 7078.

Открытое акционерное общество «Издательство «Просвещение».
127521, Москва, 3-й проезд Марьиной рощи, 41.

Отпечатано в ООО «Тульская типография».
Россия, 300600, г. Тула, пр. Ленина, д. 109.

ISBN 978-5-09-032127-3

Глава X

Метод координат

§ 1 Координаты вектора

1

Найдите такое число q, чтобы выполнялось равенство $\vec{m} = q\vec{n}$, если: а) $\vec{m} \uparrow\uparrow \vec{n}$, $|\vec{m}| = 5$ см, $|\vec{n}| = 2$ см; б) $\vec{m} \uparrow\downarrow \vec{n}$, $|\vec{m}| = 0{,}7$ м, $|\vec{n}| = 2$ м.

Решение.

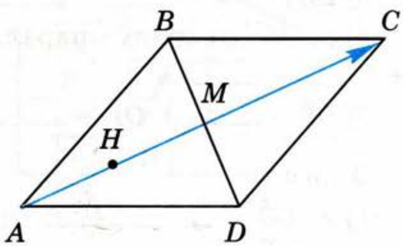
а) По условию $\vec{m} \uparrow\uparrow$ ____, т. е. q ___ 0, $|q| = \frac{|\vec{m}|}{|\_\_|} =$ ______ , $q =$ ______

б) По условию $\vec{m}$ ___ $\vec{n}$, т. е. q ___ 0, $|q| =$ _____ = ______ , $q =$ ______

Ответ. а) _____ ; б) ______

2

Диагонали параллелограмма $ABCD$ пересекаются в точке M, точка H — середина отрезка AM. Найдите, если это возможно, такое число k, чтобы выполнялось равенство: а) $\overrightarrow{AM} = k\overrightarrow{AC}$; б) $\overrightarrow{MH} = k\overrightarrow{AC}$; в) $\overrightarrow{DM} = k\overrightarrow{AC}$.



Решение.

а) $\overrightarrow{AM} \uparrow\uparrow \overrightarrow{AC}$, поэтому искомое число k существует, $|k| = \frac{|\overrightarrow{AM}|}{\_\_\_}$ и k ___ 0. Так как диагонали параллелограмма точкой M делятся ____________________ , то $|k| =$ ____ . Итак, $k =$ ___

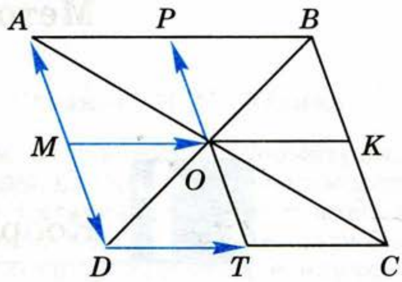
б) $\overrightarrow{MH}$ ___ $\overrightarrow{AC}$, поэтому искомое число k ____________________, $|k| = \frac{|\_\_|}{\_\_\_}$ и k ___ 0. По условию задачи точка H — ________________ отрезка AM, следовательно, $MH = \frac{1}{2}$ ______ $= \frac{1}{2}($ ___ $AC) =$ ___ AC, поэтому $|k| =$ ____ . Итак, $k =$ ______

в) Векторы $\overrightarrow{DM}$ и ______ не коллинеарны, поэтому искомого значения k не ____________________

Ответ. а) $k =$ ____ ; б) $k =$ ______ ; в) ____________________

3

В параллелограмме $ABCD$, изображенном на рисунке, $MK \parallel DC$ и $PT \parallel DA$.



1) Разложите по векторам $\vec{a} = \overrightarrow{DT}$ и $\vec{b} = \overrightarrow{DA}$ векторы: а) $\overrightarrow{DO}$; б) $\overrightarrow{DB}$.

2) Разложите вектор $\overrightarrow{OB}$ по векторам: а) $\vec{m} = \overrightarrow{MO}$ и $\vec{c} = \overrightarrow{OP}$; б) $\vec{m} = \overrightarrow{MO}$ и $\vec{n} = \overrightarrow{AD}$.

Решение.

1) По условию задачи $MK \parallel$ _______, поэтому $\angle BOK$ ___ $\angle BDC$. В треугольниках BOK и BDC угол _____ общий, $\angle BOK =$ $= \angle$ ______, следовательно, $\triangle BOK$ ___ $\triangle BDC$. Так как $BO =$ ___ BD, то $BK = \frac{1}{2}$___, следовательно, точка K — середина стороны ___ параллелограмма. Аналогично точки M, P и T — __________ сторон данного параллелограмма.

а) По правилу параллелограмма получаем: $\overrightarrow{DO} = \overrightarrow{DT}$ ___ $\overrightarrow{DM}$, но $\overrightarrow{DT}$ ___ $\vec{a}$, $\overrightarrow{DM} =$ ___ $\overrightarrow{DA} =$ ___ $\vec{b}$. Итак, $\overrightarrow{DO} = \vec{a} +$ ___ $\vec{b}$.

б) $\overrightarrow{DB} = \overrightarrow{DC} +$ _____ $=$ ___ $\overrightarrow{DT} +$ _____ $=$ _____ $+ \vec{b}$.

2) а) По правилу параллелограмма $\overrightarrow{OB} = \overrightarrow{OK} +$ _____ $= \overrightarrow{MO} +$ $+$ _____ $=$ _____ $+ \vec{c}$.

б) $\overrightarrow{OB} =$ _____ $+ \overrightarrow{OP} =$ _____ $+$ (___) $\overrightarrow{AD} =$ ___

Ответ.

1) а) $\overrightarrow{DO} =$ ______________ ; б) ______________

2) а) $\overrightarrow{OB} =$ ______________ ; б) ______________

4

Векторы $\vec{a}$ и $\vec{b}$ не коллинеарны. Найдите числа x и y такие, что: а) $2\vec{a} + x\vec{b} = y\vec{a} - \vec{b}$; б) $x\vec{a} + \vec{b} - 3\vec{a} + 4y\vec{b} = \vec{0}$; в) $4x\vec{a} - \vec{a} + y\vec{b} = \vec{0}$.

Решение.

а) В левой и ____________ частях данного равенства записаны разложения некоторого вектора по двум неколлинеарным ______________ $\vec{a}$ и ___. Поскольку такое разложение единственно, то коэффициенты перед вектором $\vec{a}$ равны, следовательно, $y =$ ___. Аналогично $x =$ _____

б) Запишем данное равенство в виде $(x-3)$___ + (1+ _____)$\vec{b}$ = $= 0\vec{a}+0\vec{b}$. Так как разложение вектора по двум _______________ _______________ векторам $\vec{a}$ и $\vec{b}$ единственно, то $x-$___ = 0 и ___ + $4y =$ ___ . Отсюда получаем: $x =$ ___ , $y =$ _____

в) В силу единственности разложения _______________ по двум _______________ векторам получаем: $4x -$ ___ = 0 и $y =$ ___ . Следовательно, $x =$ ___ , y ___

Ответ.

а) $x =$ _____ , $y =$ ___ ; б) _______________ ; в) _______________

5

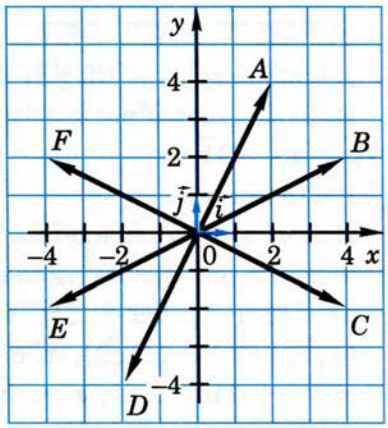
а) Какой из данных на рисунке векторов равен вектору $4\vec{i} - 2\vec{j}$?

б) Напишите разложение вектора $\overrightarrow{OE}$ по координатным векторам $\vec{i}$ и $\vec{j}$.

в) Найдите координаты вектора $\overrightarrow{OA}$.

г) Напишите, какой вектор имеет координаты {−4; 2}.

д) Отложите от точки O вектор с координатами {2; −4}.



Ответ.

а) ________ ; б) $\overrightarrow{OE}$ = _______________ ;

в) $\overrightarrow{OA}$ {___ ; ___}; г) ________

6

Выпишите координаты вектора: а) $\vec{a} = 3\vec{i} - 5\vec{j}$; б) $\vec{b} = \vec{i} + 2\vec{j}$; в) $\vec{c} = -\vec{j}$.

Решение.

Координатами вектора называются _______________ его разложения по координатным _______________

а) По условию задачи $\vec{a} = 3\vec{i} -$ ___ $\vec{j}$. Следовательно, коэффициенты разложения вектора $\vec{a}$ по координатным _______________ $\vec{i}$ и ___ равны 3 и _____ , т. е. $\vec{a}$ {___ ; _____}.

б) $\vec{b} = \vec{i} + 2\vec{j} = 1\vec{i} +$ ___ $\vec{j}$, следовательно, $\vec{b}$ {___ ; ___}.

в) $\vec{c} = -\vec{j} =$ ___ $\vec{i}$ + (_____)$\vec{j}$, т. е. $\vec{c}$ {___ ; _____}.

7

Запишите разложение по координатным векторам $\vec{i}$ и $\vec{j}$ вектора: а) $\vec{m}\{-2; 3\}$; б) $\vec{n}\{0; -3\}$; в) $\vec{k}\{-1; 0\}$.

Р е ш е н и е.

Координаты вектора — это коэффициенты его ________________ ________ по координатным векторам. Поэтому: а) $\vec{m} = -2\vec{i} + \_\_\_\_ \vec{j}$;
б) $\vec{n} = \_\_\_\_ \vec{i} + (\_\_\_\_\_\_)\vec{j} = \_\_\_\_\_\_\_\_\_\_$; в) $\vec{k} = \_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_ = \_\_\_\_\_\_\_\_$

О т в е т.

а) $\vec{m} =$ ________________

б) ____________________

в) ____________________

8

Даны векторы $\vec{a}\{2; -3\}$ и $\vec{b}\{-1; 5\}$.

Найдите координаты векторов: а) $\vec{m} = \vec{a} + \vec{b}$; б) $\vec{n} = 4\vec{a}$; в) $\vec{k} = -\vec{b}$; г) $\vec{p} = 4\vec{a} - 3\vec{b}$.

Р е ш е н и е.

Используя утверждения о координатах суммы векторов и произведения вектора на число, получаем:

а) $\vec{m}\{2+(-1);\ -3 + \_\_\_\_\}$, т. е. $\vec{m}\{\_\_\_\_;\ \_\_\_\_\}$.

б) $\vec{n}\{4 \cdot 2;\ 4 \cdot (\_\_\_\_\_)\}$, т. е. $\vec{n}\{\_\_\_\_;\ \_\_\_\_\_\_\}$.

в) $\vec{k}\{-(-1);\ -\_\_\_\_\}$, т. е. $\vec{k}\{\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\}$.

г) Обозначим через x_1 и y_1 абсциссу и ординату вектора $\vec{a}$, через x_2 и y_2 — абсциссу и ________________ вектора $\vec{b}$, буквами x и y — ________________ и ординату вектора $\vec{p}$.

Тогда $x = 4x_1 - 3\_\_\_\_ = 4 \cdot \_\_\_\_ - 3 \cdot (-1) = \_\_\_\_$, $y = 4\_\_\_\_ - 3\_\_\_\_ =$
$= \_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_ = \_\_\_\_$

Следовательно, $\vec{p}\{\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\}$.

О т в е т.

а) $\vec{m}\{\_\_\_\_\_\_\_\_\}$

б) ____________________

в) ____________________

г) ____________________

§ 2 Простейшие задачи в координатах

9

Точка A лежит на положительной полуоси Ox, а точка B — на положительной полуоси Oy; $OA = 5$, $OB = 12$. Найдите координаты: а) вершин прямоугольника $OAMB$; б) радиус-векторов точек A, B и M; в) вектора $\overrightarrow{AB}$; г) векторов $\overrightarrow{OC}$ и $\overrightarrow{BC}$, если C — точка пересечения диагоналей прямоугольника $OAMB$.

Решение.

а) O (___ ; ___), A (5; ___), M (___ ; ___), ____________

б) Радиус-вектором точки A называется вектор, начало которого совпадает с ______________ координат, а его конец — точка ___ . Координаты радиус-вектора точки A равны соответствующим ______________________ точки ___ . Поэтому $\overrightarrow{OA}$ {___ ; ___}, $\overrightarrow{OB}$ {___ ; ___}, $\overrightarrow{OM}$ ____________

в) Каждая координата вектора $\overrightarrow{AB}$ равна ____________________ соответствующих координат его конца (точки ___) и __________ (точки A). Так как A (___ ; ___), B (___ ; ___), то $\overrightarrow{AB}$ {___ ; ___}.

г) Точка пересечения диагоналей прямоугольника является ______________ диагонали OM, следовательно, $\overrightarrow{OC}$ = ___ $\overrightarrow{OM}$. Так как $\overrightarrow{OM}$ {___ ; ___}, то $\overrightarrow{OC}$ {___ ; ___}.

Каждая координата вектора $\overrightarrow{BC}$ равна ______________ соответствующих ____________________ его конца (точки ___) и __________ (точки ___). Координаты точки C равны соответствующим координатам ее радиус-вектора $\overrightarrow{OC}$, т. е. C (___ ; ___), координаты точки B равны (__________), поэтому $\overrightarrow{BC}$ {___ ; ___}.

10

Заполните таблицу:

K	(5; −2)	(___ ; ___)	(−3; 0)
M	(3; 0)	(−2; 1)	
$\overrightarrow{KM}$	{___ ; ___}	{8; 0}	
$2\overrightarrow{KM}$			{6; 4}
$-0{,}5\overrightarrow{KM}$			

11

Найдите координаты вершины B параллелограмма $ABCD$, если A (0; 0), C (5; 7), D (3; 0).

Решение.

1) Четырехугольник $ABCD$ — ______________________________ , следовательно, $\overrightarrow{AB}$ __ $\overrightarrow{DC}$. Так как C (5; ___), D (___ ; ___), то $\overrightarrow{DC}$ {___ ; ___}, поэтому $\overrightarrow{AB}$ {___ ; ___}.

2) Так как A (0; ___), $\overrightarrow{AB}$ {___ ; ___}, то B (___ ; ___).

Ответ. ______________

12

Даны точки: A (2; −1), B (5; −3), C (−2; 11), D (−5; 13). Докажите, что они являются вершинами параллелограмма.

Доказательство.

Воспользуемся признаком параллелограмма: если в четырехугольнике две стороны равны и ______________________, то этот ______________________ является ______________________

В силу этого признака достаточно показать, что: а) $\overrightarrow{AB}$ ___ $\overrightarrow{DC}$; б) точки A, B и D не лежат на одной прямой.

а) Так как A (2; −1), B (__________), то $\overrightarrow{AB}$ {___ ; ___}; так как C (−2; 11), D (__________), то $\overrightarrow{DC}$ {___ ; ___}. Итак, $\overrightarrow{AB}$ ___ $\overrightarrow{DC}$.

б) Точки A, B и D лежат на одной ______________, если координаты векторов $\overrightarrow{AB}$ и $\overrightarrow{AD}$ пропорциональны. Так как $\overrightarrow{AB}$ {___ ; ___} и $\overrightarrow{AD}$ {___ ; ___}, то координаты векторов $\overrightarrow{AB}$ и $\overrightarrow{AD}$ ______________ ______________________, поэтому эти векторы не коллинеарны и, следовательно, точки A, B и D ______________ на одной прямой. Итак, четырехугольник $ABCD$ — ______________________, что и требовалось доказать.

13

Заполните таблицу, если точка K — середина отрезка BC.

B	(3; −1)	(0; 5)	
C	(7; 3)		(4; 0)
K		(−2; 1)	(6; −2)

14

Найдите координаты середины медианы AM треугольника ABC, если A (−2; 4), B (2; −1), C (6; 1).

Решение.

1) Отрезок AM — медиана треугольника ______ , поэтому точка M — ________________ стороны BC. По условию задачи B (2; −1), C (___ ; ___), следовательно, M (___ ; ___).

2) Пусть точка K — середина отрезка AM. Так как A (−2; ___), M (___ ; ___), то K (___ ; ___).

Ответ.

____

15

Найдите длины векторов: $\vec{a}\ \{-3;\ 4\}$, $\vec{b}\ \{5;\ 0\}$, $\vec{c}\ \{0;-2\}$.

Решение.

$|\vec{a}| = \sqrt{(-3)^2 + \_\_\_\_\_\_} = \sqrt{\_\_\_\_\_\_} = \_\_\_$

$|\vec{b}| = \sqrt{\_\_\_\_\_\_ + \_\_\_\_\_\_} = \_\_\_\_\_\_ = \_\_\_$

$|\vec{c}| = \_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_$

Ответ.

$|\vec{a}| = \_\_\_$; ____________ ; ____________

16

Найдите длины векторов $\overrightarrow{AB}$ и $\overrightarrow{AM}$, если A (5; −3), B (2; 1), M (5; 3).

Решение.

а) $|\overrightarrow{AB}| = \sqrt{(2-5)^2 + \_\_\_\_\_\_} = \sqrt{\_\_\_\_\_\_} = \_\_\_$

б) $|\overrightarrow{AM}| = \sqrt{\_\_\_\_\_\_ + \_\_\_\_\_\_} = \_\_\_\_\_\_\_\_ = \_\_\_$

Ответ.

$|\overrightarrow{AB}| = \_\_\_$; ____________

17

Найдите длины сторон AB и BC и длину медианы BK треугольника ABC, если $A(-2; 4)$, $B(10; -1)$, $C(6; -4)$.

Решение.

а) $AB = \sqrt{(10+2)^2 + \_\_\_\_\_\_\_\_} = \sqrt{\_\_\_\_\_\_} = \_\_\_\_$

б) $BC =$ ____

в) Так как отрезок BK — __________________ треугольника ABC, то точка K является ________________ стороны AC, следовательно,

$K(\_\_\_\_;\ \_\_\_\_)$. Поэтому $BK = \sqrt{\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_ + \_\_\_\_\_\_\_\_\_\_} = \sqrt{\_\_\_\_\_\_}$

Ответ. $AB =$ ____; $BC =$ ____; $BK =$ ______

18

Докажите, что четырехугольник $ABCD$ является ромбом, и найдите его площадь, если $A(-3; 4)$, $B(7; 9)$, $C(5; -2)$, $D(-5; -7)$.

Решение.

Четырехугольник является ромбом, если все его стороны ____________. Действительно, если в четырехугольнике противоположные стороны попарно ____________, то этот четырехугольник является ________________________________. А параллелограмм, у которого ________ стороны ____________, называется ромбом.

Сравним длины ________________ данного четырехугольника:

$AB^2 = (7+3)^2 + (\_\_\_\_\_\_\_\_)^2 = \_\_\_\_\_\_ + \_\_\_\_\_\_ = \_\_\_\_\_\_$

$BC^2 =$ ______________________________________

$CD^2 =$ ______________________________________

$DA^2 =$ ______________________________________

Следовательно, $AB^2 \_\_\_\_ BC^2 \_\_\_\_ CD^2 \_\_\_\_ DA^2$, откуда $AB = BC =$ $= \_\_\_\_\_\_ = \_\_\_\_\_\_$

Итак, четырехугольник $ABCD$ является ____________, поэтому его площадь равна половине ____________________ его диагоналей.

$AC^2 = (-3-5)^2 + \_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_ = \_\_\_\_\_\_$, следовательно, $AC = \_\_\_\_\_\_$;

$BD^2 = \_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_$, следовательно, $BD = \_\_\_\_\_\_$

$S_{ABCD} = 0{,}5AC \cdot \_\_\_\_\_\_ = \_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_ = \_\_\_\_\_\_$

Ответ. ______________

19

Даны точки $A(-2; -3)$, $B(-3; 4)$, $C(4; 5)$.

1) Докажите, что в треугольнике ABC углы A и C равны.

2) Найдите площадь треугольника ABC.

Решение.

1) В треугольнике ABC углы A и C равны, если BC ___ BA. Так как $BC^2 = (-3-4)^2 +$ ________ $=$ ______ , $BA^2 =$ ________________ , то BC ___ BA. Следовательно, $\angle A$ ___ $\angle C$.

2) В данном равнобедренном треугольнике ABC основанием служит сторона _____ , следовательно, медиана, проведенная из вершины ____ , является ______________ треугольника. Найдем AC и медиану BM. $AC = \sqrt{(-2-4)^2 + \_\_\_\_\_\_\_\_} = \sqrt{\_\_\_\_} =$ _____

Так как точка M — середина стороны AC, то M (___ ; ___) и поэтому $BM = \sqrt{\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_} =$ _____ $=$ _____

Итак, $S_{ABC} = 0{,}5AC \cdot$ _____ $= 0{,}5 \cdot$ _____ $\cdot$ _____ $=$ _____

Ответ. ______________

§ 3 Уравнение окружности и прямой

20

Даны точки $A(-1; 2)$, $B(0; \sqrt{3})$, $C(1; -2)$, $D(2; -1)$. Какие из этих точек лежат на линии L, заданной уравнением $x^2-2x+y^2-3=0$?

Решение. Точка лежит на линии, заданной уравнением с двумя переменными x и y, если ее ________________ удовлетворяют этому уравнению, и не лежит на линии, если ее координаты ________________ уравнению линии. Подставим ________ ________ данных точек в уравнение $x^2 - 2x +$ ____________ :

$(-1)^2 - 2(-1) +$ __________ $= 1 +$ __________ $- 3 = 0$. Координаты точки A не удовлетворяют данному ____________ , следовательно, точка A ______________ на линии L: $A \notin$ ___

$0^2 - 2 \cdot 0 +$ ______________ $=$ _________ $= 0$. Следовательно, B ___ L.

____________________________________ . Следовательно, C ___ L.

____

Ответ. __________

Какие из следующих уравнений задают окружность:

а) $x^2 + (y-1)^2 = 25$;

б) $4x^2 + 4y^2 = 9$;

в) $2x^2 + 2y^2 = 0$;

г) $x^2 + y^2 + 1 = 0$;

д) $(x+2)^2 + y^2 - 0{,}01 = 0$;

е) $x^2 - 2x + y^2 = 3$?

Решение.

а) Уравнение $x^2 + (y-1)^2 = 25$ имеет вид $(x-a)^2 + (\_\_\_ - b)^2 = r^2$, где $a = 0$, $b =$ ___ , $r =$ ___ $\neq 0$, следовательно, это уравнение _______________ окружность.

б) Разделив обе части уравнения $4x^2 +$ ________ $= 9$ на 4, получим уравнение $x^2 +$ ________ $= \frac{9}{4}$, которое имеет вид $(x-a)^2 +$ + ________ $= r^2$, где $a =$ ___ , $b =$ ___ , $r =$ ___ $\neq 0$. Следовательно, это уравнение _______________ окружность.

в) Равенство $2x^2 +$ _______ $= 0$ выполняется только при $x =$ ___ , $y =$ ___ , т. е. данному уравнению удовлетворяют координаты только одной __________ (0; 0). Следовательно, это уравнение ____________________ окружность.

г) Левая часть уравнения $x^2 + y^2 +$ ___ $= 0$ при любых значениях x и y ______________ нуля, а правая часть равна _________ . Поэтому точек, ____________________ которых удовлетворяют данному ____________________ , не существует. Следовательно, уравнение $x^2 + y^2 + 1 = 0$ _______________ окружность.

д) Перенеся слагаемое $-0{,}01$ в _______________ часть уравнения $(x+2)^2 + y^2$ ________ $\neq 0$, получим уравнение __________________ , которое имеет вид $(x-a)^2 +$ __________________ , где $a =$ _____ , $b =$ ___ , $r =$ _____ $\neq 0$. Следовательно, уравнение $(x+2)^2 +$ _____ $-$ $- 0{,}01 = 0$ _______________ окружность.

е) Прибавив к обеим частям уравнения $x^2 - 2x +$ _____________ число 1, получим уравнение $x^2 - 2x +$ ________ $+ y^2 =$ ____ , которое можно записать в виде $(x-1)^2 + ($___________$)^2 =$ ________ , т. е. в виде $(x-a)^2 +$ __________ $= r^2$, где $a =$ ___ , $b =$ ___ , $r =$ _____ $\neq 0$. Следовательно, данное уравнение _______________ окружность.

Ответ.

Окружность задают уравнения а), _________________

22

Постройте окружность, заданную уравнением:

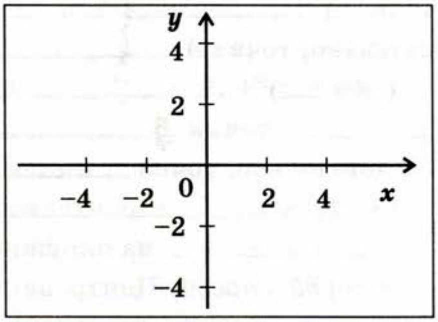
а) $x^2 + y^2 = 16$; б) $(x-1)^2 + y^2 = 4$; в) $x^2 + 2x + y^2 - 4y = 4$.

Р е ш е н и е.

Для построения окружности надо знать ее радиус и координаты ____________. Если уравнение окружности имеет вид $(x-a)^2 + (y-b)^2 = r^2$, то ее радиус равен ____, а центром является точка с координатами (____ ; ____).

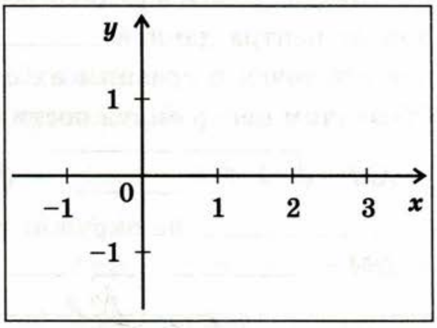
а) Уравнение $x^2 + y^2 = 16$ запишем в виде $(x-0)^2 + ($________$)^2 =$ ____ . Отсюда следует, что центр окружности — точка (____; ____), а радиус равен ____

Построим искомую окружность, заданную уравнением $x^2 + y^2 = 16$.



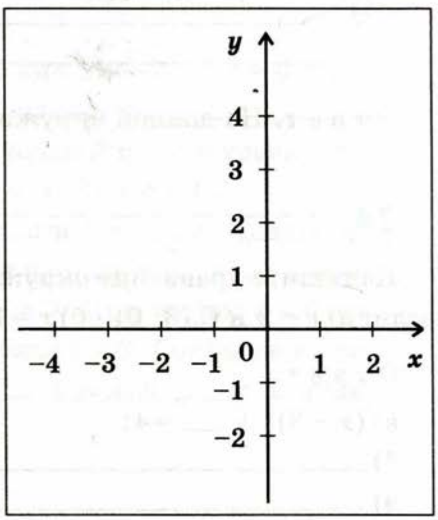
б) Уравнение $(x-1)^2 +$ ____________ представим в виде $(x -$ ____$)^2 + (y-0)^2 =$ $=$ ____ . Следовательно, центр окружности — точка (____; ____), а радиус равен ____

Построим искомую окружность, заданную уравнением $(x-1)^2 + y^2 = 4$.



в) Чтобы выделить квадрат двучлена с переменной x и квадрат ____________________ с переменной y, прибавим к обеим частям уравнения $x^2 + 2x +$ ____________ слагаемые 1 и 4. Получим уравнение $(x^2 + 2x + 1) +$ $+ (y^2 -$ ______ $+ 4) = 4 +$ ____ $+$ ____ , которое запишем в виде $(x+1)^2 +$ $+ (y -$ ____$)^2 =$ ____ . Значит, центр окружности — точка (________), а радиус равен ____

Построим искомую окружность, заданную уравнением $x^2 + 2x + y^2 - 4y = 4$.



23

Окружность задана уравнением $(x+1)^2+(y-2)^2=25$. Не пользуясь чертежом, установите, какие из точек A (3; −2), B (−4; 6) и C (3; −1) лежат на окружности.

Решение.

Первый способ. Выясним, координаты каких точек удовлетворяют __________________ окружности.

$(3+1)^2 + (\_\_\_\_\_\_)^2 = 4^2 + \_\_\_\_ = \_\_\_\_ \neq 25$. Итак, координаты точки A ____________________________ данному уравнению, следовательно, точка A ____________________ на окружности.

$(-4+\_\_\_)^2 + \_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_ = \_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_ = \_\_\_\_$. Итак, ________________ точки B _______________________ данному уравнению, следовательно, точка ____

$(3+1)^2 +$ _____________________________________. Итак, точка C __________________ на окружности.

Второй способ. Центр данной окружности — точка с координатами (___ ; ___), а радиус окружности равен ___ . Найдем расстояния от центра данной __________________________ до каждой из данных точек и сравним их с ______________________ окружности. Обозначим центр окружности буквой M, тогда:

$AM = \sqrt{(-1-)^2 + \_\_\_\_\_\_\_\_} = \sqrt{\_\_\_\_\_\_\_\_} \neq 5$, следовательно, точка A ________________ на окружности.

$BM =$ ____, следовательно, ____

$CM =$ ____

Ответ. На данной окружности лежат точки _______________

24

Напишите уравнение окружности радиуса r с центром в точке C, если: а) $r = 2$ и C (3; 0); б) $r = 3$ и C (0; −2); в) $r = \sqrt{5}$ и C (−2; 3).

Ответ.

а) $(x-3)^2 + \_\_\_ = 4$;

б) ____________________________

в) ____________________________

25

Напишите уравнение серединного перпендикуляра к отрезку AB, если $A\ (-3;\ 4)$, $B\ (1;\ -2)$.

Решение. Если точка $M\ (x;\ y)$ лежит на серединном ______________________ к отрезку AB, то AM ___ BM, и поэтому AM^2___BM^2. Запишем это равенство в координатах: $(x+3)^2+$ $+$ ___________ $=$ ___________ $+ (y+2)^2$. Раскрыв скобки, получим: x^2+6x+ _____________________ $= x^2-2x+$ _____________________ .

Перенесем все слагаемые из правой части в левую __________ равенства: x^2+6x+ ______________________________ $-4y-4=0$.

Приведем подобные члены: $8x -$ _______________ $= 0$. Разделив обе части уравнения на 4, получим $2x -$ ______________ $= 0$.

Если точка $M\ (x;\ y)$ лежит на серединном _________________ к отрезку AB, то ее координаты удовлетворяют уравнению $2x -$ ____________ $= 0$. Если же точка $M\ (x;\ y)$ не лежит на ____ к отрезку AB, то $AM^2 \neq$ ___ , и поэтому ее __________________ не удовлетворяют полученному уравнению.

Итак, уравнение $2x -$ ____________ $= 0$ является уравнением серединного _________________________ к отрезку AB.

Ответ. _________________

26

Напишите уравнение прямой, проходящей через точки $A\ (-1;\ 2)$ и $B\ (2;\ -3)$.

Решение. Уравнение прямой имеет вид $ax +$ ___ $+ c = 0$. Точки A и ___ лежат на прямой, т. е. их координаты ______________ этому уравнению. Подставив координаты точек A и ___ в уравнение, получим: $a \cdot (-1) +$ _____ $+ c = 0$; _____ $+ b \cdot (-3) + c = 0$.

Выразим отсюда a и b через c: $a =$ ___c и $b =$ ___c. Подставив полученные значения a и ___ в уравнение $ax + by +$ ___ $=$ ___ , приходим к уравнению: $-5cx + ($___$)\ y +$ ___ $= 0$. При любом $c \neq 0$ это уравнение является _________________ прямой AB. Сократив на $-c$, получим искомое _______________________ прямой _____ в виде: _____ $+ 3y - 1 = 0$.

Ответ. ___________________

27

Даны координаты вершин треугольника: $A\ (-3;\ 0)$, $B\ (1;\ 4)$, $C\ (3;\ 0)$. Напишите уравнение прямой, содержащей среднюю линию треугольника, параллельную стороне AB.

Решение.

Обозначим середины сторон BC и AC буквами K и M соответственно. Тогда $K\ (2;$ ____$)$, $M\ ($____ ; ____$)$, а прямая KM— искомая. Запишем ее уравнение в виде $ax +$ ________________ $= 0$. Подставив координаты точек K и _____ в это уравнение, получим систему:

$$\begin{cases} 2a + \_\_\_\_\_\_\_\_ + c = 0 \\ \_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_ = 0. \end{cases}$$

Отсюда следует: $c =$ ____ и b ____ $- a$, и поэтому искомое уравнение принимает вид: ____ $- ay = 0$ или $x -$ ____ $= 0$.

Ответ. ____________

28

Прямые заданы уравнениями $x + y = 0$ и $2x - y + 3 = 0$.

а) Найдите координаты точки пересечения данных прямых.

б) Напишите уравнение прямой, проходящей через найденную точку и параллельной оси ординат.

Решение.

а) Искомая точка лежит на данных прямых, следовательно, ее координаты удовлетворяют уравнениям этих ________________, т. е. являются решением ____________ уравнений:

$$\begin{cases} x + y = 0 \\ 2x - \_\_\_\_\_\_\_\_ = 0. \end{cases}$$

Отсюда находим: $x =$ ____ и $y =$ ____

б) Уравнение прямой, проходящей через __________ $M_0\ (x_0;\ y_0)$ параллельно ____________ ординат, имеет вид: $x =$ ____ . Учитывая, что $M_0(-1;$ ____$)$, получаем искомое уравнение: $x =$ ____

Ответ.

а) (____; ____);

б) ____________

Окружность и прямая заданы уравнениями $x^2 + (y - 4)^2 = 25$ и $x - 7y + 3 = 0$. Найдите длину хорды, отсекаемой окружностью на прямой.

Р е ш е н и е.

Чтобы найти координаты ________________ пересечения окружности и ____________________, решим систему уравнений:

$$\begin{cases} x^2 + (\_\_\_\_\_\_\_\_)^2 = 25 \\ x - \_\_\_\_\_\_\_\_\_\_ + 3 = 0. \end{cases}$$

Последовательно получаем:

$x = 7y - $ ______ ; $(7y - 3)^2 + (y - $ ______ $)^2 = 25$;

$49y^2 - 42y + $ __________________________ $= 25$;

$50y^2 - $ ____________ $= 0$; $y_1 = $ _____ , $y_2 = $ _____

Соответственно находим $x_1 = $ _____ и $x_2 = $ _____

Итак, данные окружность и прямая пересекаются в точках (_____ ; _____) и (_____ ; _____).

Искомая длина хорды равна:

$$\sqrt{(-3-4)^2 + (\_\_\_\_\_\_)^2} = \sqrt{\_\_\_\_\_\_ + \_\_\_} = \sqrt{\_\_\_\_\_\_} = \_\_\_\sqrt{2}.$$

О т в е т. ____________

Глава XI

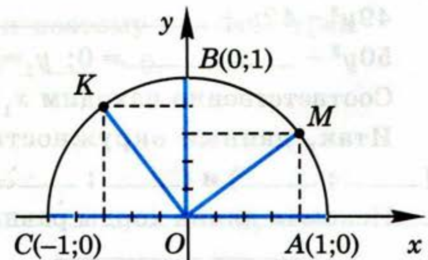
Соотношения между сторонами и углами треугольника. Скалярное произведение векторов

§ 1 Синус, косинус, тангенс угла

30

Найдите по рисунку синус, косинус и тангенс угла:

а) AOM; б) AOK; в) AOC; г) AOB.



Р е ш е н и е.

а) Угол AOM образован лучом OM и положительной ______________ абсцисс, точка M лежит на единичной ______________________ . Значит, синус угла AOM равен __________ точки M, т. е. $\sin\angle AOM =$ ________ ; косинус угла AOM равен ______________ точки _____ , т. е. $\cos\angle AOM =$ _____ ; тангенс угла AOM равен отношению $\dfrac{\sin\angle AOM}{\_\_\_\_\_}$, т. е. $\operatorname{tg}\angle AOM =$ _____ : _____ = _____

б) синус угла AOK равен ________________ точки _____ , т. е. $\sin\angle AOK =$ _____ ; косинус угла _____ равен ____________ точки ____ , т. е. $\cos\angle AOK =$ _____ ; тангенс угла AOK равен ____

в) $\sin\angle AOC =$ _____ ; $\cos\angle AOC =$ _____ ; ________________

г) ______________ ; $\cos\angle AOB =$ _____ ; тангенс угла AOB не ______________ , так как $\cos\angle AOB =$ _____

О т в е т.

а) $\sin\angle AOM =$ _____ ; ______________________________

б) ______________________________

в) ______________________________

г) ______________________________

31

Принадлежит ли единичной полуокружности точка:

а) $P\,(-0{,}6;\ 0{,}8)$; б) $T\left(\frac{1}{4}; \frac{3}{4}\right)$; в) $H\left(\frac{\sqrt{2}}{2}; -\frac{1}{\sqrt{2}}\right)$?

Р е ш е н и е.

Точка с координатами $(x;\ y)$ принадлежит ________________ полуокружности, если выполнены два условия: 1) ____ $\leqslant x \leqslant$ ____, ____ $\leqslant y \leqslant$ ____ и 2) $x^2 + y^2 =$ ____ . Рассмотрим данные точки.

а) Точка P: $x =$ ______ , $y =$ ______ удовлетворяют первому условию: ____ $\leqslant x \leqslant$ ____ , ____________________ ; $x^2 + y^2 = (0{,}6)^2 +$ ______ $=$ $=$ ____________ $= 1$, следовательно, ____________ второе условие. Поэтому точка P ________________ единичной полуокружности.

б) Точка T: $x =$ ______ , $y =$ ______ , следовательно, ____ $\leqslant x \leqslant$ ____ , __________ y __________ . Итак, первое условие __________________ . $x^2 + y^2 =$ ______ $+$ ______ $=$ ______ $\neq 1$. Следовательно, второе условие ____________________ . Поэтому точка T ____________________ единичной полуокружности.

в) Точка H: $x =$ ______ , $y =$ ______ , следовательно, ____ . Поэтому точка H ____

О т в е т.

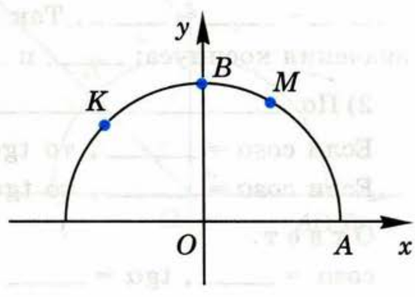
а) Принадлежит.

б) ____________________

в) ____________________

32

Выпишите значения синуса, косинуса и тангенса углов AOM, AOB и AOK, если $M\left(\frac{1}{2}; \frac{\sqrt{3}}{2}\right)$, $B\,(0;\ 1)$, $K\left(-\frac{\sqrt{2}}{2}; \frac{\sqrt{2}}{2}\right)$.



Р е ш е н и е. Синус угла AOM — это __________________ точки M, т. е. $\sin\angle AOM =$ ______

Косинус угла AOM — это ________________________ точки M, т. е. ____________________

$\operatorname{tg}\angle AOM = \frac{\_\_\_\_}{\cos\angle AOM}$, т. е. $\operatorname{tg}\angle AOM =$ _____ : _____ = _____

$\sin\angle AOB =$ _____ , $\cos\angle AOB =$ _____ , ____________________

$\sin\angle AOK =$ _____ , ____________________

Ответ.

$\sin\angle AOM =$ _____ , ____________________

____

____

33

Найдите $\sin\alpha$ и $\operatorname{tg}\alpha$, если $\cos\alpha = -\frac{\sqrt{3}}{2}$.

Решение.

1) Используя основное тригонометрическое тождество $\sin^2\alpha + \cos^2\alpha =$ _____ , получаем: $\sin^2\alpha + \left(-\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^2 =$ _____ , откуда $\sin^2\alpha =$ = _____ − _____ = _____ . Так как ____ $\leqslant \sin\alpha \leqslant$ ____ , то $\sin\alpha =$ ____

2) По определению $\operatorname{tg}\alpha = \frac{\sin\alpha}{\_\_\_}$, поэтому $\operatorname{tg}\alpha =$ _____ : _____ = = _____

Ответ. $\sin\alpha =$ _____ ; ____________________

34

Найдите $\cos\alpha$ и $\operatorname{tg}\alpha$, если $\sin\alpha = \frac{\sqrt{2}}{2}$.

Решение.

1) Используя основное тригонометрическое ____________________ $\sin\alpha^2 +$ _____ $= 1$, получаем: $\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^2 +$ _____ $= 1$, откуда $\cos^2\alpha =$ = _____ − _____ = _____ . Так как ____ $\leqslant \cos\alpha \leqslant$ ____ , то находим два значения косинуса: _____ и _____

2) По ____________________ $\operatorname{tg}\alpha = \frac{\_\_\_\_}{\cos\alpha}$.

Если $\cos\alpha =$ _____ , то $\operatorname{tg}\alpha =$ _____ : _____ = _____

Если $\cos\alpha =$ _____ , то $\operatorname{tg}\alpha =$ _____ : _____ = _____

Ответ.

$\cos\alpha =$ _____ , $\operatorname{tg}\alpha =$ _____ или $\cos\alpha =$ _____ , $\operatorname{tg}\alpha =$ _____

35

Вычислите $\cos 120°$, $\sin 150°$, $\text{tg}\,135°$.

Решение. Используя формулу приведения $\cos(180° - \alpha) =$ $= \_\_\_\_\_\_$, получаем: $\cos 120° = \cos(180° - \_\_\_\_) = \_\_\_\_\ 60° = \_\_\_\_$

Используя формулу $\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_$ $\sin(180° - \alpha) = \_\_\_\_\_\_$, получаем: $\sin 150° = \sin(\_\_\_\_ - \_\_\_\_) = \_\_\_\_\_\_\ 30° = \_\_\_\_$

Используя формулы приведения $\sin(180° - \alpha) = \_\_\_\_\_\_$ и $\cos(180° - \_\_\_\_) = \_\_\_\_\_\_\_\_$, получаем:

$$\text{tg}\,135° = \frac{\sin 135°}{\_\_\_\_} = \frac{\_\_\_\_\_\_\_\_}{\cos(180° - \_\_\_\_)} = \frac{\sin 45°}{\_\_\_\_} = -\text{tg}\ \_\_\_\_ = \_\_\_\_$$

Ответ. $\_\_\_\_\_\_\_\_$; $\_\_\_\_\_\_\_\_$; $\_\_\_\_\_\_\_\_$

36

Найдите координаты точки A, если: а) $\alpha = 60°$, $OA = 4$; б) $\alpha = 150°$, $OA = 6$ (α — угол между лучом OA и положительной полуосью Ox).

Решение. Координаты x и y точки A можно вычислить по формулам: $\_\_\_\_ = OA\cos\alpha$, $y = \_\_\_\_\_\_$, где OA — $\_\_\_\_\_\_$ отрезка OA, α — $\_\_\_\_$ между лучом $\_\_\_\_$ и положительной $\_\_\_\_\_\_$ Ox.

а) $x = 4\cos 60° = \_\_\_\_ = \_\_\_\_$; $y = 4\ \_\_\_\_\_\_ = \_\_\_\_ = \_\_\_\_$

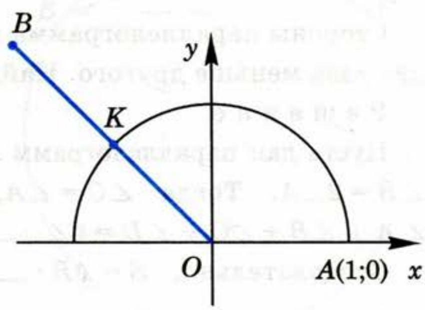
б) $x = \_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_$; $y = \_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_$

Ответ. а) $A(\_\_\_\_; \_\_\_\_)$; б) $A(\_\_\_\_; \_\_\_\_)$.

37

Луч OB пересекает единичную полуокружность в точке K. Найдите координаты точки B, если $OB = 2$, $K\left(-\frac{\sqrt{2}}{2}; \frac{\sqrt{2}}{2}\right)$.

Решение. Так как точка K лежит на $\_\_\_\_\_\_\_\_$ полуокружности, то абсцисса точки K является косинусом угла $\_\_\_\_$, ордината — $\_\_\_\_\_\_$ угла AOK, т. е. $\cos\angle AOK =$ $= \_\_\_\_$, $\sin\angle AOK = \_\_\_\_$. Координаты x и y точки B найдем по формулам $x = \_\_\_\_ \cos\angle AOK$, $y = OB \times$ $\times \_\_\_\_\_\_$, т. е. $x = 2\ \_\_\_\_\_\_$, $y = \_\_\_\_\_\_\_\_$



Ответ. $B(\_\_\_\_; \_\_\_\_)$.

§ 2 Соотношения между сторонами и углами треугольника

38

Вычислите площадь треугольника ABC, если $AB = 3$ м, $BC = 8$ м и $\angle B = 30°$.

Решение.

Пусть S — площадь данного ________ ABC, тогда

$S = \frac{1}{2}$ ________ $\sin B =$ ____ $\cdot\ 3 \cdot$ ____ $\cdot$ ____ $=$ ____ (м²).

Ответ. ________

39

Площадь треугольника BCE равна $18\sqrt{2}$ см², $CE = 2BE$, $\angle E = 45°$. Найдите сторону CE.

Решение.

Так как $S_{BCE} = \frac{1}{2} BE \cdot$ ________ и $CE = 2$____, то

$S_{BCE} = \frac{1}{2}\ BE \cdot 2BE \cdot$ ________ $= BE^2 \cdot$ ________

Отсюда получаем $BE^2 = S_{BCE} :$ ________ $= 18\sqrt{2} :$ ___ $=$ ___ (см²), $BE =$ ___ см, $CE =$ ____ см.

Ответ.

$CE =$ ____ см.

40

Стороны параллелограмма равны 4 м и 6 м, а один из его углов в два раза меньше другого. Найдите площадь параллелограмма.

Решение.

Пусть дан параллелограмм $ABCD$, в котором $AB = 4$ м, $AD = 6$ м, $\angle B = 2\angle A$. Тогда $\angle C = \angle A$, $\angle D = \angle$ ____ $= 2\angle$ ____ , откуда $\angle A + \angle B + \angle C + \angle D = 6\angle$ ____ $= 360°$, откуда $\angle A =$ ____

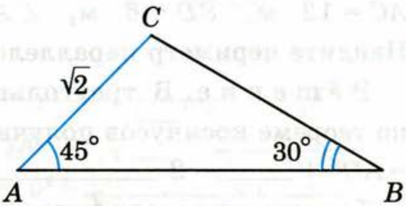
Следовательно, $S = AB \cdot$ ____ $\cdot \sin A = 4 \cdot$ ____ $=$ ____ (м²).

Ответ. ________

41

Дано: $\triangle ABC$, где $AC = \sqrt{2}$ см, $\angle A = 45°$, $\angle B = 30°$.

Найти: BC.



Решение.

По теореме синусов $\dfrac{\_\_\_\_}{\sin A} = \dfrac{AC}{\_\_\_\_}$, откуда получаем: $BC = \dfrac{\_\_\_\_}{\sin B} \sin A =$

$= (\sqrt{2} : \_\_\_\_) \cdot \_\_\_\_ = \_\_\_\_$ (см).

Ответ. ________

42

Дано: $\triangle MPT$, где $\angle T = 150°$, $TM = 2$ м, $MP = 6$ м.

Найти: $\sin P$.

Решение.

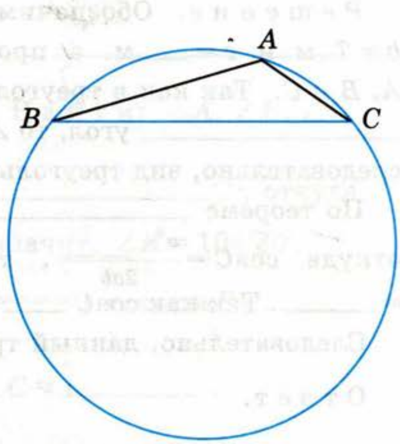
По теореме ____________ $\dfrac{MP}{\sin T} = \_\_\_\_$. Отсюда получаем:

$\sin P = \dfrac{TM}{MP} \cdot \_\_\_\_\_\_ = \dfrac{2}{6} \cdot \_\_\_\_ = \_\_\_\_$

Ответ. ________

43

Точки A, B и C лежат на окружности диаметра 12, хорда BC равна 6. Найдите градусную меру угла BAC.



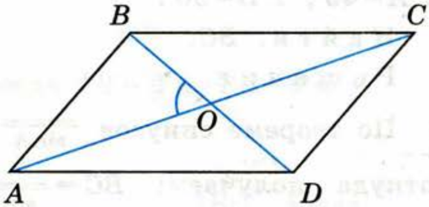
Решение.

Из равенства $\dfrac{a}{\sin A} = 2 \cdot \_\_\_\_$ получаем: $\sin A = \dfrac{a}{\_\_\_\_}$, т. е. $\sin A = \dfrac{6}{\_\_\_\_} =$

$= \_\_\_\_$. Так как угол A тупой, то $\angle A = \_\_\_\_\_\_$

Ответ. ________

44



В параллелограмме $ABCD$ диагонали $AC = 12$ м, $BD = 6$ м, $\angle AOB = 60°$. Найдите периметр параллелограмма.

Р е ш е н и е. В треугольнике AOB по теореме косинусов получаем: $AB^2 =$ $= AO^2 +$ ______ $- 2$ ____________________

Так как диагонали параллелограмма точкой пересечения ________________ пополам, то $AO =$ _____ м, $BO =$ _____ м. Поэтому $AB^2 = 6^2 +$ ________________ $=$ $=$ _______ , $AB =$ _______ м.

Аналогично в треугольнике BOC получаем: $BC^2 = OB^2 +$ _____ $-$ $-$ __________ $\cdot \cos\angle BOC$. Так как $\angle BOC = 180° - \angle$ _______ , то $\cos\angle BOC = \cos(180° - \angle$ _______ $) = -\cos\angle AOB =$ _______ . Следовательно, $BC^2 = 6^2 +$ ____________________ $=$ _______, $BC =$ _______ м.

Итак, периметр параллелограмма равен: _____ $(AB +$ ______ $) =$ $=$ _____ (______ $+ 3\sqrt{7}) = 6$ (_______ + _______) (м).

О т в е т. ____________________

45

Определите вид треугольника (остроугольный, прямоугольный или тупоугольный), стороны которого равны 5 м, 7 м и 9 м.

Р е ш е н и е. Обозначим стороны треугольника так: $a = 5$ м, $b = 7$ м и $c =$ ____ м, а противолежащие им вершины буквами A, B и C. Так как в треугольнике против большей стороны лежит ____________________ угол, то $\angle$ _____ — больший угол треугольника, а следовательно, вид треугольника определяется углом _____

По теореме ________________________ $c^2 = a^2 +$ ____________________ ,

откуда $\cos C = \dfrac{a^2 + \_\_\_\_\_}{2ab}$, т. е. $\cos C = (5^2 +$ ____________ $) :$ ____________ $=$ $=$ _______ . Так как $\cos C$ _____ 0, то угол C — ________________

Следовательно, данный треугольник — ________________________

О т в е т. ________________________

46

Дано: $\triangle ABC$, где $a = 2\sqrt{3}$, $b = 1$, $\angle C = 30°$. **Найти:** c, $\angle A$, $\angle B$.

Решение.

1) По теореме косинусов $c^2 = a^2 +$ ________________, т. е. $c^2 =$ $= (2\sqrt{3})^2 +$ ________________ = ____, откуда $c = \sqrt{} \approx$ ________

2) По теореме ________________ $a^2 = b^2 +$ ________________, откуда $\cos A = \dfrac{b^2 + c^2 - \_\_\_\_}{\_\_\_\_\_\_}$, т. е. $\cos A = (1^2 +$ ________$)$: ______ $\approx$ $\approx$ ________. Следовательно, $\angle A \approx$ ______

3) $\angle B = 180° - (\angle A +$ ______$)$, $\angle B \approx$ ______

Ответ. $c \approx$ ________, $\angle A \approx$ ______, $\angle B \approx$ ______

47

Дано: $\triangle ABC$, где $a = 5$, $\angle B = 70°$, $\angle C = 80°$. **Найти:** b, c, $\angle A$.

Решение.

1) $\angle A = 180° - ($________$) =$ ______

2) По теореме синусов $\dfrac{a}{\sin A} = \dfrac{b}{\_\_\_\_}$, откуда $b = a\dfrac{\sin \_\_\_\_}{\_\_\_\_}$, т. е. $b \approx 5 \cdot$ ________ = ______

3) По теореме ________________ $\dfrac{a}{\sin A} = \dfrac{\_\_\_\_}{\sin C}$, откуда $c = a \cdot$ ________, т. е. $c \approx$ ____ $\cdot$ ______ = ______

Ответ. $\angle A =$ ______, $b \approx$ ______, $c \approx$ ______

48

Дано: $\triangle ABC$, где $a = 4$, $b = 2$, $c = 3$. **Найти:** $\angle A$, $\angle B$, $\angle C$.

Решение.

1) По теореме косинусов $a^2 = b^2 +$ ________________, откуда $\cos A = \dfrac{b^2 + \_\_\_\_}{2bc} = \dfrac{2^2 + \_\_\_\_\_\_}{\_\_\_\_\_\_} =$ ______, значит, $\angle A \approx 104°30'$.

2) Аналогично получаем $\cos B = \dfrac{a^2 + \_\_\_\_\_\_}{\_\_\_\_\_\_}$, т. е. $\cos B =$ ______, откуда $\angle B \approx$ ________

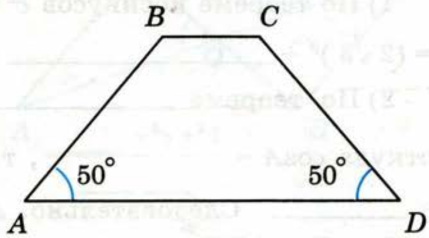
3) $\angle C = 180° - (\angle A + \angle$ ______$)$, т. е. $\angle C \approx$ ________

Ответ. $\angle A \approx$ ________, ________, ________

§ 3 Скалярное произведение векторов

49

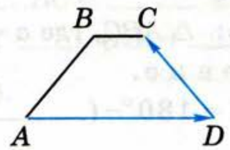
В трапеции $ABCD$ углы A и D равны $50°$. Найдите углы между векторами:
а) $\overrightarrow{AB}$ и $\overrightarrow{AD}$; б) $\overrightarrow{AD}$ и $\overrightarrow{DC}$; в) $\overrightarrow{AB}$ и $\overrightarrow{CD}$;
г) $\overrightarrow{BA}$ и $\overrightarrow{CD}$; д) $\overrightarrow{BC}$ и $\overrightarrow{DA}$; е) $\overrightarrow{AD}$ и $\overrightarrow{BC}$.



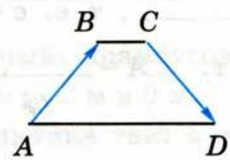
Решение.

а) Векторы $\overrightarrow{AB}$ и $\overrightarrow{AD}$ отложены от одной точки (точки ____), поэтому угол между ______________ $\overrightarrow{AB}$ и $\overrightarrow{AD}$ равен градусной ____________ угла ________ Следовательно, $\widehat{\overrightarrow{AB}\,\overrightarrow{AD}} = 50°$.

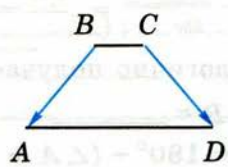
б) Отложим от начала вектора $\overrightarrow{DC}$ (точки ____) вектор $\overrightarrow{DK}$, равный вектору _____ (выполните построение на рисунке). Угол между векторами $\overrightarrow{AD}$ и $\overrightarrow{DC}$ равен градусной ________ угла ________. Следовательно, $\widehat{\overrightarrow{AD}\,\overrightarrow{DC}} =$
$= 180° -$ ______ = ______



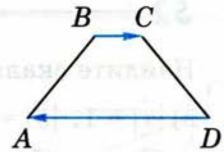
в) Отложим от начала __________ $\overrightarrow{AB}$ вектор $\overrightarrow{AH}$, ____________ вектору $\overrightarrow{CD}$ (выполните построение на рисунке). Угол между ____________ $\overrightarrow{AB}$ и $\overrightarrow{CD}$ равен ____________ мере угла ____. Так как $AH \parallel$ _____, то накрест лежащие углы HAD и ______ равны. Следовательно, $\angle HAD =$ ______. Отсюда получаем: $\angle BAH = 50° +$ ______ =
= ______, т. е. $\widehat{\overrightarrow{AB}\,\overrightarrow{CD}} =$ ______



г) Отложим от начала вектора $\overrightarrow{BA}$ вектор $\overrightarrow{BO}$, равный вектору ______ (постройте на рисунке). Угол ____________ векторами $\overrightarrow{BA}$ и $\overrightarrow{CD}$ равен ____________
_____ угла _____, т. е. $\widehat{\overrightarrow{BA}\,\overrightarrow{CD}} =$ _____



д) Отложим от ____________ вектора $\overrightarrow{BC}$ вектор $\overrightarrow{BM}$, ____________ вектору $\overrightarrow{DA}$ (выполните построение на рисунке). Угол между векторами ______ и $\overrightarrow{DA}$ равен ____________________ угла _____. Следовательно, $\widehat{\overrightarrow{BC}\,\overrightarrow{DA}}$ = ______

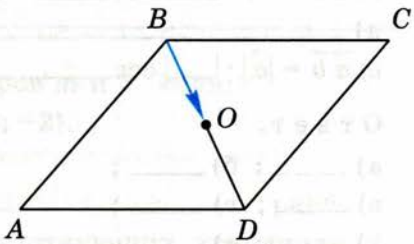


е) Так как векторы $\overrightarrow{AD}$ и ______ сонаправлены, то угол между ними считается равным ______, т. е. $\widehat{\overrightarrow{AD}\,\overrightarrow{BC}}$ = ______

Ответ.
а) 50°; б) ______ ; ____

50

Точка O — середина диагонали BD ромба $ABCD$. Какие векторы с началом и концом в точках A, B, C, D и O перпендикулярны вектору $\overrightarrow{BO}$?



Решение. Диагонали ромба пересекаются и ______________ пересечения делятся ____________________, следовательно, точка O __________ на диагонали AC. Диагонали ромба взаимно ________________________, поэтому $\overrightarrow{BO} \perp$ ______, $\overrightarrow{BO} \perp$ ______, $\overrightarrow{BO} \perp$ ______, $\overrightarrow{BO} \perp$ ______, $\overrightarrow{BO} \perp$ ______, $\overrightarrow{BO} \perp$ ______

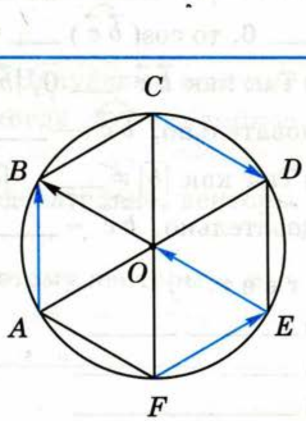
Ответ. $\overrightarrow{AC}$, ____________________

51

Точка O — центр окружности. Центральные углы AOB, BOC, COD, DOE, EOF и FOA равны.

Найдите углы между вектором OB и вектором:

а) $\overrightarrow{AB}$; б) $\overrightarrow{CD}$; в) $\overrightarrow{EO}$; г) $\overrightarrow{FE}$.



Ответ.

____

52

Найдите скалярное произведение векторов $\vec{a}$ и $\vec{b}$, если:

а) $|\vec{a}| = 1$, $|\vec{b}| = 2$, $\widehat{\vec{a}\,\vec{b}} = 30°$; б) $|\vec{a}| = 3$, $|\vec{b}| = \sqrt{2}$, $\widehat{\vec{a}\,\vec{b}} = 135°$;

в) $|\vec{a}| = 2$, $|\vec{b}| = 3$, $\widehat{\vec{a}\,\vec{b}} = 90°$; г) $|\vec{a}| = 1$, $|\vec{b}| = 0$;

д) $|\vec{a}| = 3$, $|\vec{b}| = 1$, $\widehat{\vec{a}\,\vec{b}} = 180°$; е) $|\vec{a}| = 6$, $\vec{a} = \vec{b}$.

Р е ш е н и е.

а) По определению скалярного ______________ векторов $\vec{a}\,\vec{b} = |\vec{a}| \cdot$ ____ $\cdot \cos$ ______, следовательно, $\vec{a}\,\vec{b} = 1 \cdot$ ____ $\cdot \frac{\sqrt{3}}{2} =$ $=$ ____

б) $\vec{a}\,\vec{b} = 3 \cdot$ ____ $\cdot$ ________ $=$ ____

в) Так как $\cos(\widehat{\vec{a}\,\vec{b}}) = \cos 90° =$ ____, то $\vec{a}\,\vec{b} =$ ____

г) $\vec{a}\,\vec{b} = 1 \cdot$ ____ $\cdot \cos$ ____ $=$ ____

д) ______________________________

е) $\vec{a}\,\vec{b} = |\vec{a}| \cdot |$___$| \cos$ ______ $= |$___$|^2 =$ ____

О т в е т.

а) ____; б) ____;

в) ____; г) ____;

д) ____; е) ____

53

Определите вид угла (острый, прямой или тупой) между ненулевыми векторами $\vec{b}$ и $\vec{c}$, если: а) $\vec{b}\,\vec{c} < 0$; б) $\vec{b}\,\vec{c} > 0$; в) $\vec{b}\,\vec{c} = 0$.

Р е ш е н и е.

а) $\vec{b}\,\vec{c} = |\vec{b}| \cdot$ ____ $\cdot$ ________. Так как $\vec{b}\,\vec{c}$ ____ 0, $|\vec{b}|$ ____ 0, $|\vec{c}|$ ____ 0, то $\cos(\widehat{\vec{b}\,\vec{c}})$ ____ 0. Следовательно, $\widehat{\vec{b}\,\vec{c}}$ — ________ угол.

б) Так как $\vec{b}\,\vec{c}$ ____ 0, $|\vec{b}|$ ______, $|\vec{c}|$ ______, то $\cos(\widehat{\vec{b}\,\vec{c}})$ ____ 0. Следовательно, $\widehat{\vec{b}\,\vec{c}}$ — ____________ угол.

в) Так как $|\vec{b}| \neq$ ____, $|\vec{c}|$ ______ 0, $\vec{b}\,\vec{c}$ ____ 0, то $\cos(\widehat{\vec{b}\,\vec{c}}) =$ ____ Следовательно, $\widehat{\vec{b}\,\vec{c}} =$ ______

О т в е т.

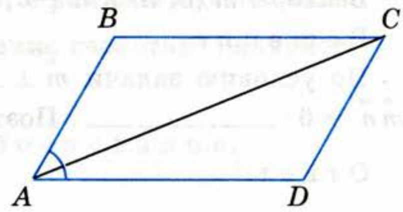
а) ______________

б) ______________

в) ______________

54

Дано: параллелограмм $ABCD$, в котором $\angle BAD = 60°$, $AB = 3$, $AD = 5$.



Найти: AC.

Решение.

1) $AC^2 = |\overrightarrow{AC}|^2 = \overrightarrow{AC} \cdot$ _____

2) По правилу параллелограмма $\overrightarrow{AC} = \overrightarrow{AB} +$ ______. Поэтому $\overrightarrow{AC} \cdot \overrightarrow{AC} =$
$= (\overrightarrow{AB} +$ ______$)($______$+ \overrightarrow{AD}) = \overrightarrow{AB}^2 + 2\,\overrightarrow{AB} \cdot$ ______ $+$ ______ $= |\overrightarrow{AB}|^2 +$
$+ 2\,|\overrightarrow{AB}| \cdot |$_____$| \cos(\widehat{\overrightarrow{AB}\,\overrightarrow{AD}}) +$ ______ $= 3^2 + 2 \cdot$ ______ $+ 5^2 =$ ______

Итак, $AC^2 =$ _____, поэтому $AC =$ _____

Ответ. __________

55

Найдите скалярное произведение векторов $\vec{m}$ и $\vec{n}$, если:
а) $\vec{m}\,\{1; 2\}$, $\vec{n}\,\{-2; 4\}$; б) $\vec{m}\,\{0; 0{,}5\}$, $\vec{n}\,\{3; -2\}$.

Решение.

а) Скалярное произведение двух ________________ равно сумме ____________________ их соответствующих координат, т. е. $\vec{m}\vec{n} = 1 \cdot ($____$) +$ _______ $=$ ____

б) $\vec{m}\vec{n} = 0 \cdot$ ________________ $=$ ____

Ответ. а) $\vec{m}\vec{n} =$ ____; б) ____________

56

Даны векторы $\vec{a}\,\{0{,}5; 0\}$, $\vec{b}\,\{2; -0{,}5\}$, $\vec{c}\,\{-1; -4\}$. Какие из них взаимно перпендикулярны?

Решение.

Данные векторы $\vec{a}$, $\vec{b}$ и ____ — ненулевые. Ненулевые векторы перпендикулярны тогда и только тогда, когда их скалярное ____________________ равно __________

$\vec{a}\vec{b} = 0{,}5 \cdot$ ____ $+$ __________ $=$ ____ $\neq 0$, следовательно, векторы $\vec{a}$ и $\vec{b}$ __________________________

$\vec{a}\vec{c} =$ ________________ $\cdot (-4)$ ____ 0. Поэтому векторы $\vec{a}$ и $\vec{c}$ ____________________________

$\vec{b}\vec{c} =$ ____________, значит, ________________________

Ответ. ____ и ____

57

Векторы $\vec{m}\{6;\ 3\}$ и $\vec{n}\{-0{,}5;\ y\}$ перпендикулярны. Найдите y.

Решение.

По условию задачи $\vec{m} \perp$ ____, следовательно, $\vec{m}\vec{n}$ = ____. Но $\vec{m}\vec{n} = 6 \cdot$ __________. Поэтому $-3 + 3y = 0$, откуда $y =$ ____

Ответ. ________

58

Вычислите угол между векторами $\vec{p}\{2;\ 1\}$ и $\vec{q}\{1;\ 3\}$.

Решение.

Используя для ненулевых векторов $\vec{p}\{x_1;\ y_1\}$ и $\vec{q}\{x_2;\ y_2\}$ формулу

$$\cos(\widehat{\vec{p}\,\vec{q}}) = \frac{x_1x_2 + \underline{\qquad}}{\sqrt{x_1^2 + \underline{\qquad}} \cdot \sqrt{\underline{\qquad} + y_2^2}},$$

получаем:

$$\cos(\widehat{\vec{p}\,\vec{q}}) = \frac{2 \cdot 1 + \underline{\qquad}}{\sqrt{2^2 + \underline{\qquad}} \cdot \sqrt{\underline{\qquad\qquad}}} = \underline{\qquad\qquad\qquad} = \underline{\qquad},$$

следовательно, $\widehat{\vec{p}\,\vec{q}} =$ ____

Ответ. ____

59

Верно ли, что для любых векторов $\vec{a}$, $\vec{b}$ и $\vec{c}$ выполняется равенство $(\vec{a}\,\vec{b})\,\vec{c} = \vec{a}\,(\vec{b}\,\vec{c})$?

Решение.

Скалярное ____________ двух векторов является числом. Пусть $\vec{a}\,\vec{b} = x$, $\vec{b}\,\vec{c} = y$. Согласно определению, произведение данного вектора на число является ________, коллинеарным данному вектору, поэтому $x\vec{c} \parallel \vec{c}$ и $y\vec{a} \parallel$ ____. Если векторы $\vec{a}$ и $\vec{c}$ не коллинеарны и $x \neq 0$, $y \neq 0$, то векторы $x\vec{c}$ и $y\vec{a}$ ________________, а следовательно, не могут быть __________

Итак, равенство $(\vec{a}\,\vec{b})\,\vec{c} = \vec{a}\,(\vec{b}\,\vec{c})$ для произвольных трех векторов $\vec{a}$, $\vec{b}$ и $\vec{c}$ __________

Ответ. __________

Упростите выражение $(\vec{a}+\vec{b})\,\vec{c}+\vec{c}\,(\vec{b}-\vec{a})$ и найдите его значение, если $|\vec{b}|=2$, $|\vec{c}|=3$, $\widehat{\vec{b}\,\vec{c}}=120°$. Укажите, какие свойства скалярного произведения при этом использовались.

Решение.	Обоснование.
Так как $\vec{c}\,(\vec{b}-\vec{a})=(\vec{b}-\vec{a})\underline{\qquad}$,	____________________
то $(\vec{a}+\vec{b})\vec{c}+\vec{c}\,(\vec{b}-\vec{a})=$	закон скалярного умножения векторов
$=(\vec{a}+\vec{b})\vec{c}+(\underline{\qquad\qquad})\vec{c}=$	
$=((\vec{a}+\vec{b})+(\vec{b}-\underline{\quad}))\ \underline{\quad}$	____________________ закон

Используя переместительный и ____________ законы сложения ____________, получаем: $(\vec{a}+\vec{b})+(\vec{b}-\vec{a})=2\underline{\quad}$

Следовательно,	____________________
$((\vec{a}+\vec{b})+(\underline{\qquad\qquad}))\vec{c}=$	закон скалярного ____________
$=(2\underline{\quad})\vec{c}=2(\underline{\qquad})$.	векторов

Но $\vec{b}\,\vec{c}=|\underline{\quad}|\cdot|\underline{\quad}|\cdot\underline{\qquad\qquad}=\underline{\qquad\qquad}=\underline{\qquad}$

Итак, $(\vec{a}+\vec{b})\vec{c}+\vec{c}\,(\vec{b}-\vec{a})=\underline{\quad}\,\vec{b}\,\vec{c}=\underline{\qquad}$

Ответ. ______

Глава XII

Длина окружности и площадь круга

§ 1 Правильные многоугольники

61

Верно ли утверждение:

а) выпуклый многоугольник, у которого все стороны равны, является правильным;

б) любой четырехугольник с равными углами правильный?

Ответ обоснуйте.

Ответ.

а) Неверно. Например, ______________________________
____
____

б) ____
____
____

62

Найдите углы правильного n-угольника, если:

а) $n = 9$; б) $n = 12$; в) $n = 36$.

Решение.

Сумма углов выпуклого n-угольника равна $(n-2) \cdot 180°$, а так как по условию n-угольник правильный, то каждый его угол равен $((n - \_\_\_) \cdot \_\_\_\_\_) : n$. Пусть α_n — угол правильного n-угольника, тогда:

а) $\alpha_9 = (9-2) \cdot 180° : 9 = \_\_\_\_\_\_\_\_ = \_\_\_\_\_\_$

б) $\alpha_{12} = \_\_\_\_\_\_\_\_ \cdot \_\_\_\_\_\_\_\_ = \_\_\_\_\_ \cdot \_\_\_\_\_ = \_\_\_\_\_\_$

в) $\alpha_{36} = \_\_\_\_\_\_\_\_ \cdot \_\_\_\_\_\_\_\_ = \_\_\_\_\_\_$

Ответ. а) ______ ; б) ______ ; ______

63

Чему равна сумма внешних углов правильного n-угольника, если при каждой вершине взято по одному внешнему углу? (Задача 1082 учебника.)

Решение.

Так как каждый угол правильного n-угольника вычисляется по формуле $\alpha_n = \frac{(n-2)\cdot 180^\circ}{\_\_\_\_}$, то внешний угол при каждой вершине равен $180^\circ - \alpha_n = 180^\circ -$ ____________ = ______________________ = = _______ . Поэтому искомая сумма равна ___________ $\cdot\, n =$ _______

Ответ. _______

64

Сколько сторон имеет правильный многоугольник, если каждый его угол равен: а) 120°, б) 175°?

Решение.

Пусть n — число сторон правильного многоугольника. Так как каждый его угол вычисляется по формуле $\alpha_n = \frac{\_\_\_\_\_\_}{n}$, то:

а) $120^\circ = \frac{(n-2)\cdot 180^\circ}{n}$, откуда $120^\circ n =$ ______________________ ,

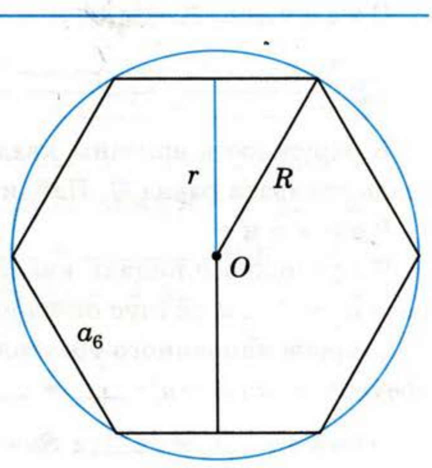
_______ = _______ , $n =$ ___

б) $175^\circ =$ ____________________ , _________ = _____________ ,

_______ = _______ , $n =$ _____

Ответ. а) ___ ; б) _____

65



На рисунке изображен правильный шестиугольник, вписанный в окружность радиуса R.

Пусть a_6 — сторона правильного шестиугольника, r — радиус вписанной окружности, P — периметр правильного шестиугольника, S — его площадь.

Найдите значения a_6, R, P и S, если $r = 4\sqrt{3}$ см.

Р е ш е н и е. По условию $r = 4\sqrt{3}$ см, поэтому

$R = r : \cos\frac{180^\circ}{\_\_\_} = \_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_ = \_\_\_\_$ (см);

$a_6 = \_\_\_\_\_ = \_\_\_\_$ (см); $P = 6 \cdot \_\_\_\_\_ = \_\_\_\_\_$ (см);

$S = \frac{1}{2}P \cdot \_\_\_\_ = \_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_ = \_\_\_\_\_\_$ (см^2).

О т в е т. $a_6 = \_\_\_\_$ см; $R = \_\_\_\_$ см; $P = \_\_\_\_$ см; $S = \_\_\_\_\_\_$ см^2.

66

Периметр квадрата, вписанного в окружность, равен $28\sqrt{2}$ см. Найдите сторону правильного треугольника, вписанного в данную окружность.

Р е ш е н и е. Так как периметр P квадрата равен $28\sqrt{2}$ см, то его сторона $a_4 = \_\_\_\_\_\_$ см и радиус описанной окружности $R = a_4 : \_\_\_\_ = \_\_\_\_\_\_\_\_\_\_ = \_\_\_\_$ (см). Следовательно, сторона правильного вписанного треугольника $a_3 = 2R \cdot \_\_\_\_\_ = \_\_\_\_\_\_$ см.

О т в е т. ______ см.

67

Хорда окружности, равная $12\sqrt{2}$ см, стягивает дугу в 90°. Найдите радиус окружности.

Р е ш е н и е.

Пусть a — хорда окружности, стягивающая дугу в 90°, тогда a — сторона ____________, вписанного в эту окружность, и поэтому $a = R \cdot \_\_\_\_$. Отсюда $R = a : \_\_\_\_ = \_\_\_\_\_\_ : \_\_\_\_ = \_\_\_\_\_$ (см).

О т в е т. _____ см.

68

В окружность вписаны квадрат и правильный треугольник. Площадь квадрата равна Q. Найдите сторону и площадь треугольника.

Р е ш е н и е.

По условию площадь квадрата равна Q, поэтому сторона квадрата $a_4 = \_\_\_\_$ и радиус описанной окружности $R = \sqrt{Q} : \_\_\_\_ = \_\_\_\_\_\_$

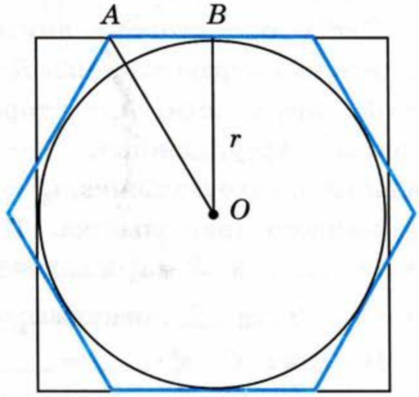
Сторона вписанного треугольника $a_3 = R \_\_\_\_ = \_\_\_\_\_$, а площадь треугольника $S = a_3^2 \cdot \_\_\_\_ = \_\_\_\_\_\_\_\_\_\_ = \_\_\_\_\_\_\_$

О т в е т. $a_3 = \_\_\_\_\_$; $S = \_\_\_\_\_\_$

69

Около окружности описаны квадрат и правильный шестиугольник. Найдите периметр квадрата, если периметр шестиугольника равен 48 см. (Задача 1092 учебника.)

Решение.



Пусть r — радиус вписанной окружности. Тогда периметр P квадрата равен _____

Из условия задачи следует, что сторона шестиугольника равна _____ см, поэтому в прямоугольном треугольнике AOB, изображенном на рисунке, $OB = r$, $AB =$ _____ см, $OA =$ _____ см, значит, $r = \sqrt{OA^2 - \_\_\_\_\_} = \_\_\_\_$ (см) и $P =$ _______ см.

Ответ. _______ см.

70

Найдите площадь S правильного n-угольника, если:

а) $n = 4,\ R = 3\sqrt{2}$ см; б) $n = 3,\ P = 24$ см;

в) $n = 6,\ r = 9$ см; г) $n = 8,\ r = 5\sqrt{3}$ см.

(Задача 1094 учебника.)

Решение.

По формулам п. 108 учебника находим:

а) $n = 4,\ a_4 = R \cdot \_\_\_\_ = \_\_\_\_ \cdot \_\_\_\_ = \_\_\_\_$ (см), $r = R \cdot \cos \_\_\_\_ =$
$= \_\_\_\_ \cdot \_\_\_\_ = \_\_\_\_$ (см), $S = \frac{1}{2} P \cdot \_\_\_\_ = \_\_\_\_\_\_\_\_ = \_\_\_\_$ (см^2);

б) $n = 3,\ a_3 = \_\_\_\_$ см, $R = a_3 : 2 \sin \_\_\_\_ = \_\_\_\_ = \_\_\_\_$ (см),
$r = R \cdot \cos \_\_\_\_ = \_\_\_\_$ (см), $S = \frac{1}{2} P \cdot \_\_\_\_ = \_\_\_\_\_\_\_\_ = \_\_\_\_$ (см^2);

в) $n = 6,\ r = R \cdot \cos \_\_\_\_ = \_\_\_\_ \cdot \_\_\_\_$, поэтому $R = \_\_\_\_$ см,
$a_6 = \_\_\_\_ = \_\_\_\_$ см, $S = \frac{1}{2} \cdot \_\_\_\_ \cdot \_\_\_\_ = \_\_\_\_$ (см^2);

г) $n = 8,\ r = R \cdot \cos \_\_\_\_,\ a = 2R \cdot \sin \_\_\_\_ = 2r \cdot \_\_\_\_\_\_ =$
$= \_\_\_\_\_\_$ (см), $S = \frac{1}{2} \cdot 8 \cdot \_\_\_\_\_\_\_\_ = \_\_\_\_\_\_ \approx \_\_\_\_\_\_$ (см^2).

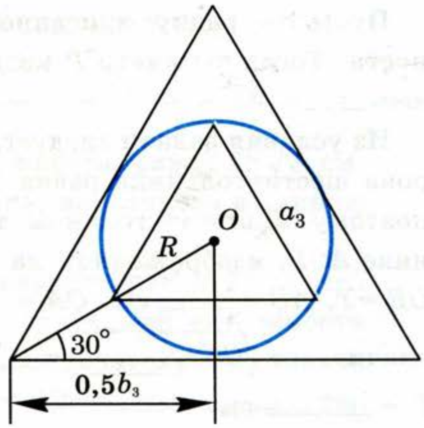
Ответ.

а) _____ см^2; б) _____ см^2; в) ______ см^2; г) ≈ ________ см^2.

71

В окружность вписан правильный треугольник и около окружности описан правильный треугольник. Найдите отношение площадей этих треугольников.

Решение.



Пусть a_3 — сторона вписанного в окружность треугольника, R — радиус этой окружности, b_3 — сторона описанного треугольника, S — площадь вписанного треугольника, Q — площадь описанного треугольника. Тогда $a_3 = R \cdot$ _____, а $S = a_3^2 \cdot$ ______ = ______ $\cdot R^2$; $0{,}5\ b_3 = R : \text{tg}$____, откуда $b_3 =$ ______ R.

Поэтому $Q = b_3^2 \cdot$ ____ = ___________ = ______ R^2. Отсюда получаем $S : Q =$ = ______________ : ___________ = _____

Ответ. _____

§ 2 Длина окружности и площадь круга

72

Найдите длину окружности, описанной около:

а) правильного треугольника со стороной $12\sqrt{3}$ см;

б) прямоугольника, меньшая сторона которого равна 8 см, а угол между диагоналями равен α;

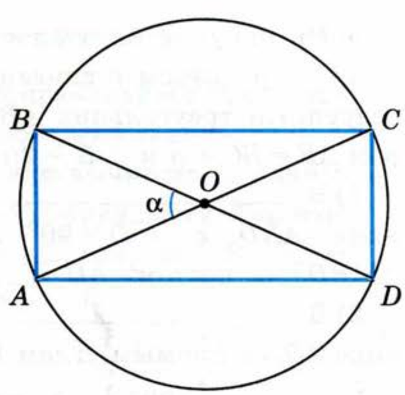
в) правильного треугольника, площадь которого равна $48\sqrt{3}$ см^2.

Решение.

Пусть R — радиус окружности, описанной около данного многоугольника, C — длина этой окружности, a — сторона данного правильного треугольника.

а) Так как $R = a$: ______, а $C = 2\pi \cdot$ ____, то $C = 2\pi \cdot$ ______ = = ______ $\cdot$ ________ = ________ (см).

б) На рисунке $ABCD$ — данный прямоугольник, у которого $AB = 8$ см, а $\angle AOB = \alpha$. В прямоугольном треугольнике ABD $\angle A = 90°$, $\angle ADB =$ = ______ (угол ADB — вписанный и опирается на дугу AB, центральный угол которой равен α), гипотенуза $BD =$ = _____ , поэтому $2R =$ ____________ см и $C =$ ________ = _____________ (см).



в) Так как площадь правильного треугольника со стороной a можно вычислить по формуле $S = \frac{a^2\sqrt{3}}{4}$, то из уравнения ______ = ________ находим $a =$ ________ = ________ (см). Следовательно, $R = a :$ ___ = = ____ (см) и $C =$ ________ (см).

Ответ.

а) ________ см; б) ________ см; в) ________ см.

73

Найдите длину окружности, вписанной:

а) в равносторонний треугольник со стороной a;

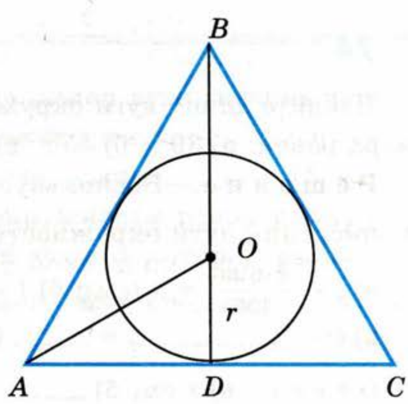
б) в равнобедренный треугольник с углом 2α при вершине и боковой стороной a;

в) в прямоугольный треугольник с острым углом α и противолежащим катетом a.

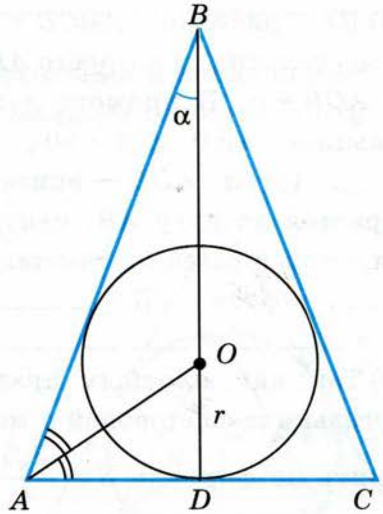
Решение.

а) На рисунке окружность с центром O и радиусом r вписана в равносторонний треугольник ABC со стороной $AB = a$.

В прямоугольном треугольнике ADO катет $OD = r$, катет $AD = \frac{1}{2}$ _____ , а $\angle OAD =$ _____ , и следовательно, $r = AD \cdot$ ________ = __________ = ______ и $C =$ _____ = ________ = ______



б) На рисунке окружность с центром O и радиусом r вписана в равнобедренный треугольник ABC, в котором $AB = BC = a$ и $\angle B = 2\alpha$.

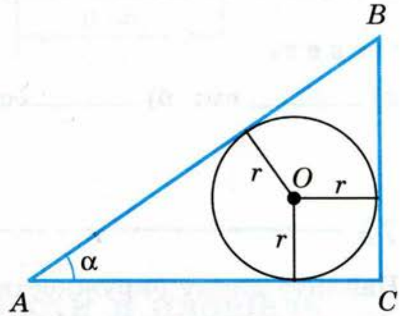


1) В ____________ треугольнике ABD с $\angle D = 90°$ $AB = a$, а $\angle ABD = \alpha$, поэтому $AD =$ ________

2) В ____________ треугольнике AOD с прямым углом D $\angle OAD = \frac{1}{2}\angle$ ____ $= \frac{1}{2}(90° -$ ___$)$, поэтому $r = AD \cdot$ ________ $=$ ________

Отсюда $C =$ ______ $=$ ________

в) На рисунке окружность с центром O и радиусом r вписана в треугольник ABC, в котором $\angle C = 90°$, $\angle A = \alpha$, $BC = a$. Поэтому $AC = a :$ ____ , $AB = a :$ ______ . $S_{ABC} = \frac{1}{2} BC \cdot AC =$ ____________ $=$ ________



С другой стороны, $S_{ABC} = \frac{1}{2} P \cdot r = \frac{1}{2}$ ____________________ $\cdot r = \frac{a(\qquad\qquad)}{2\sin\alpha} \cdot r.$

Таким образом, $\frac{a^2\cos\alpha}{2\sin\alpha} =$ ____________________ $\cdot r$, откуда $r =$ ____________ и $C =$ ________ $=$ ________

Ответ. а) ____ ; б) ____________________ ; в) ____________

74

Найдите длину дуги окружности радиуса 6 см, если ее градусная мера равна: а) 30°; б) 45°; в) 60°; г) 90°. (Задача 1109 учебника.)

Решение. Воспользуемся формулой п. 110 учебника для вычисления дуги окружности: $l = \frac{\pi R}{180} \cdot \alpha$.

а) $l = \frac{\pi \cdot 6 \cdot 30}{180} = \pi$ (см); б) $l =$ ____________ $=$ ______ (см);

в) $l =$ ____________ $=$ ____ (см); г) $l =$ ____________ $=$ ____ (см).

Ответ. а) π см; б) ______ см; в) ____ см; г) ____ см.

75

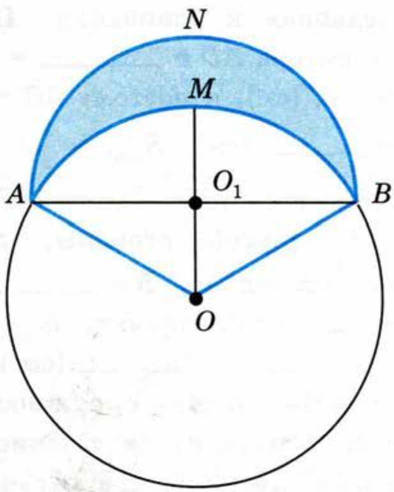
Длина окружности, описанной около правильного треугольника, равна 18π см. Найдите периметр этого треугольника.

Р е ш е н и е. Воспользуемся формулой для вычисления длины окружности $C =$ ______ и найдем радиус R этой окружности. Так как по условию $C = 18\pi$ см, то $R = 18\pi :$ _____ = ____ (см), $a_3 = R$ _____ = = ________ (см), и $P =$ ________ = ________ (см).

О т в е т. ________ см.

76

Найдите периметр закрашенной на рисунке лунки, если радиус окружности с центром в точке O равен R, радиус окружности с центром в точке O_1 равен $\frac{1}{2}AB$, а $\smile AMB = 120°$.



Р е ш е н и е. Так как $\smile AMB = 120°$, то длина дуги $l = \frac{\pi R}{180} \cdot$ _____ = _____ Хорда AB стягивает дугу AMB окружности с центром O в $120°$, поэтому $AB = a_3 =$ _____ , а радиус r окружности с центром O_1 равен $\frac{1}{2} \cdot$ _____ = = _____ , и длина m дуги ANB равна половине длины этой окружности, т. е. $m = \frac{1}{2} \cdot$ ______ = _____ = ________

Теперь найдем периметр C лунки: $C = l + m =$ _____ + ______ = $\frac{\pi R}{6} \cdot$ ________

О т в е т. ____________________________

77

Длина окружности радиуса 15 см равна длине дуги, центральный угол которой равен $150°$. Найдите радиус дуги.

Р е ш е н и е. Длина данной окружности равна ______ $\cdot$ 15 = = _______ (см). По условию длина этой окружности равна длине l дуги искомого радиуса R, центральный угол α которой равен $150°$. Используя формулу $l = \frac{\pi R \alpha}{180}$, получаем $R = l \cdot$ ________ = = __________________ = ______ (см).

О т в е т. _____ см.

Найдите площадь круга, описанного около:

а) правильного треугольника со стороной a;

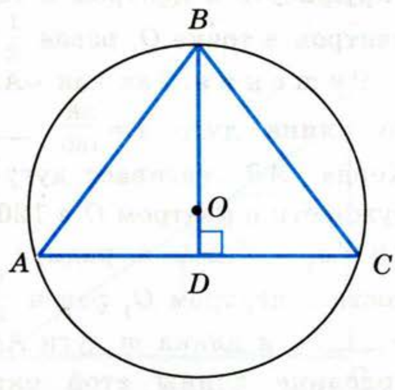
б) равнобедренного треугольника с боковой стороной, равной 10 см, и высотой, проведенной к основанию, равной 8 см;

в) равнобедренного треугольника с боковой стороной a и углом при вершине α.

Р е ш е н и е.

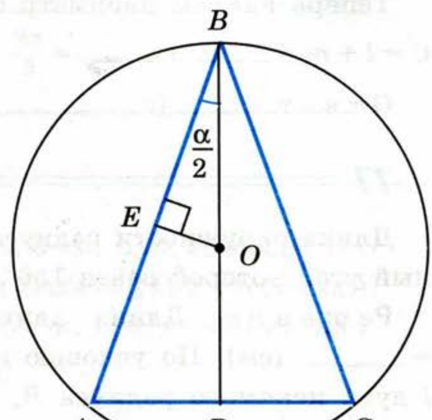
а) Так как сторона a правильного треугольника, вписанного в окружность радиуса R, равна $R \cdot$ ____ , то $R = \frac{a}{\_\_\_}$ и $S = \pi$ ____ = = ______

б) На рисунке равнобедренный треугольник ABC с основанием AC вписан в окружность, BD — его высота, проведенная к основанию. По теореме Пифагора AD = ________ = ________ = = ____ (см), и поэтому $AC = 2$ _____ = = ______ (см), $S_{ABC} = \frac{1}{2} AC \cdot$ ______ = = ____________ = _____ (см^2).



С другой стороны, $S_{ABC} = \frac{abc}{4\_\_\_}$, следовательно, R = ______________ = = ____ (см), значит, $S_{\text{круга}}$ = ______ = = ________ = ________ (см^2).

в) На рисунке окружность с центром O и радиусом R описана около равнобедренного треугольника ABC с боковой стороной $AB = a$ и углом $B = \alpha$, $OE \perp AB$. Так как $OA = OB = R$, то высота OE треугольника AOB является его медианой, поэтому $BE = \frac{1}{2} \cdot$ _____ = = ___



В прямоугольном треугольнике OBE $\angle OBE = \frac{\alpha}{2}$, $OB = R = BE$: ______ = = ________ . $S_{\text{круга}}$ = ______ = ________

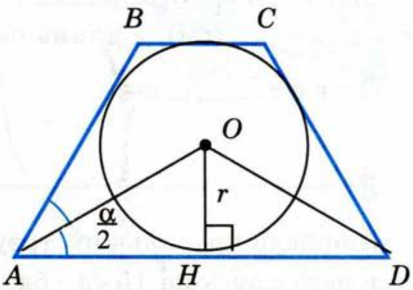
О т в е т.

а) ____ ; б) _____ см^2; в) __________

79

Найдите площадь круга, вписанного в равнобедренную трапецию с большим основанием a и острым углом α. (Задача 1117 (г) учебника.)

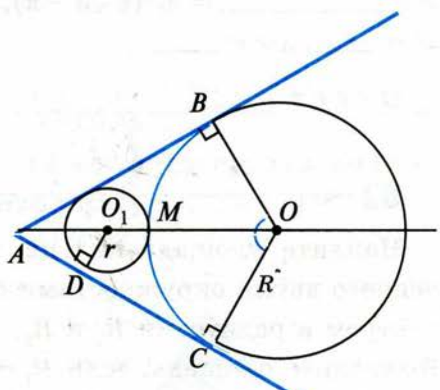
Решение. На рисунке круг с центром O и радиусом r вписан в равнобедренную ________ $ABCD$. Так как O — точка пересечения биссектрис углов ____ и ____, то $\angle OAD =$ $= \angle$ ______ $=$ ______, поэтому треугольник AOD — ____________________, следовательно, его высота OH является ______________, и $AH =$ ______. Из прямоугольного треугольника OAH находим: $OH = r = \frac{a}{2} \cdot$ ________ и площадь круга $S =$ ______ $=$ ____________



Ответ. ________________

80

На рисунке из точки A к окружности с центром O проведены касательные AB и AC (B и C — точки касания), $\angle BOC = 120°$, а длина дуги BMC равна 12 см. Найдите длину окружности, вписанной в фигуру $ABMC$, т. е. касающейся сторон угла BAC и дуги BMC.



Решение. Пусть O_1 — центр окружности, вписанной в фигуру $ABMC$, D — точка касания этой окружности со стороной AC. Обозначим радиус окружности с центром O через R, а радиус окружности с центром O_1 через r.

1) По условию $\angle BOC = 120°$, поэтому длина дуги BMC равна $\frac{\pi R}{180} \cdot$ ______ $=$ ______. С другой стороны, по условию длина этой дуги равна 12 см, следовательно, $\frac{2\pi R}{3} =$ ______, откуда $R =$ ______ см.

2) Прямоугольные треугольники ABO и ACO равны по гипотенузе и катету (AO — общая ________________, OB = ______ $= R$), поэтому $\angle BOA = \angle$ ______ $= \frac{1}{2}$ ______ = ______, $\angle BAO = \angle$ ______ = ______ Катет, лежащий против угла в 30°, равен половине ____________, значит, $AO = 2 \cdot$ ______ = _____, и аналогично, $AO_1 = 2 \cdot$ ______ = _____

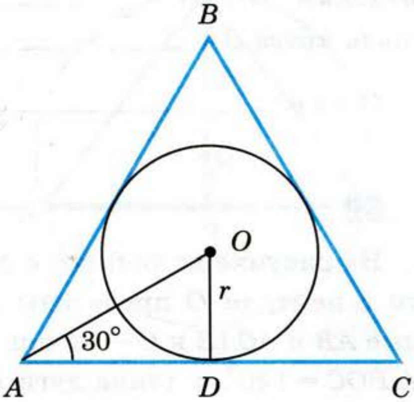
3) $AO = AO_1 + O_1M +$ _____, т. е. $2R$ = ____ + ____ + ____, ____r = ____, r = ____ = ____ (см), а длина окружности равна $2\pi \cdot$ ____ = ______ (см).

Ответ. ______ см.

81

Площадь правильного треугольника больше площади вписанного в него круга на $15\sqrt{3} - 5\pi$. Найдите радиус круга.

Решение. Пусть окружность радиуса r вписана в треугольник ABC. Тогда $AC = 2AD = 2r$: ______ = ______, полупериметр треугольника p = ____r, $S_{ABC} = p \cdot$ ___ = ________, $S_{\text{круга}} = \pi \cdot$ ___ По условию $S_{ABC} - S_{\text{круга}} = 15\sqrt{3} - 5\pi$, поэтому ____________ $= 15\sqrt{3} - 5\pi$, т. е. $r^2 \cdot$ ____________ $= 5\ (3\sqrt{3} - \pi)$, откуда r^2 = _____, а r = _____

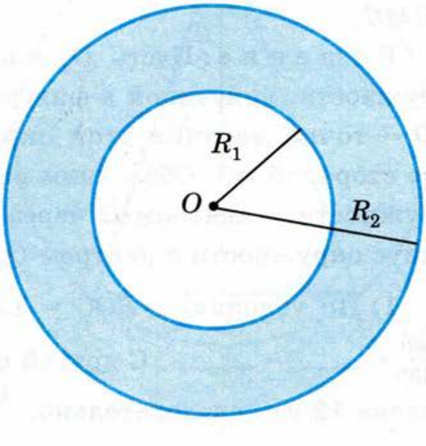


Ответ. ____

82

Найдите площадь кольца, ограниченного двумя окружностями с общим центром и радиусами R_1 и R_2, $R_1 < R_2$. Вычислите площадь, если $R_1 = 1{,}5$ см, $R_2 = 2{,}5$ см. (Задача 1120 учебника.)

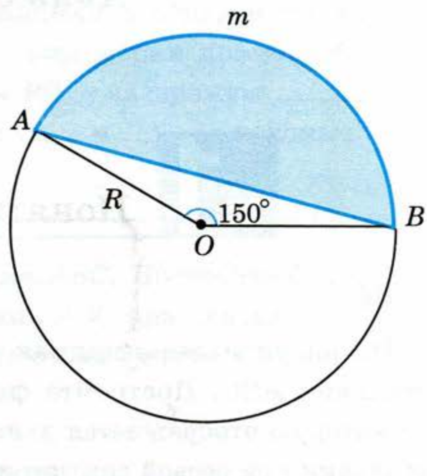
Решение. Искомая площадь кольца S = ____________ – ____________ = $= \pi$ ______________. Если $R_1 = 1{,}5$ см, $R_2 = 2{,}5$ см, то S = ______________ см² = = _____ см².



Ответ. ______ см².

83

На рисунке дуга AmB равна $150°$, а радиус R равен 2 см. Найдите площадь закрашенного сегмента.



Р е ш е н и е. Пусть S — площадь сегмента AmB, S_1 — площадь сектора $OAmB$, S_2 — площадь треугольника AOB, тогда $S =$ ______ – ______

1) $S_1 = \frac{\pi R^2}{360} \cdot$ ____ = ____ $\cdot R^2 =$ ____ (см^2).

2) $S_2 = \frac{1}{2} OA \cdot OB \cdot$ ________ = ____ $R^2 =$
= ____ (см^2).

3) $S =$ ____ – ____ = ____________ см^2.

О т в е т. ____________ см^2.

84

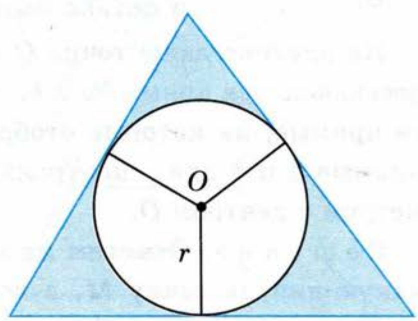
Площадь сектора с центральным углом $72°$ равна S. Найдите радиус сектора. (Задача 1127 учебника.)

Р е ш е н и е. Пусть R — радиус окружности. Тогда $S =$
= ________ $\cdot$ _____ , откуда $R^2 =$ _________ = ____ и $R =$ _______

О т в е т. ________

85

В треугольник со сторонами 13 см, 14 см и 15 см вписана окружность. Найдите площадь закрашенной фигуры.



Р е ш е н и е. Площадь S треугольника можно найти по формуле Герона $S = \sqrt{p \cdot \text{\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_}} =$
= ____________ = ______ (см^2).

С другой стороны, $S = p \cdot$ _____ , где полупериметр $p =$ ____ см, поэтому $r =$
= ___ см, а площадь круга $S_1 =$ ______ =
= ______ (см^2). Теперь можно найти площадь закрашенной фигуры $S_ф =$
$= S - S_1 =$ _____ – ________ (см^2).

О т в е т. ___________ см^2.

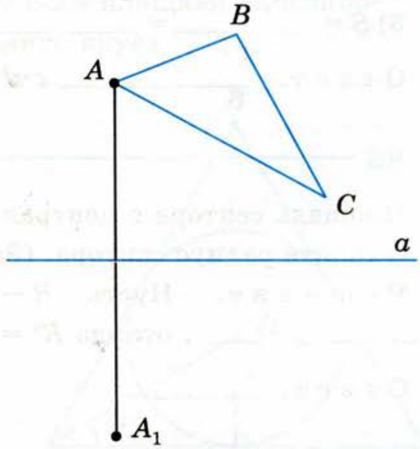
Глава XIII

Движения

§ 1 Понятие движения

86

На рисунке даны прямая a и треугольник ABC. Постройте фигуру F, на которую отображается данный треугольник при осевой симметрии с осью a. Что представляет собой фигура F?

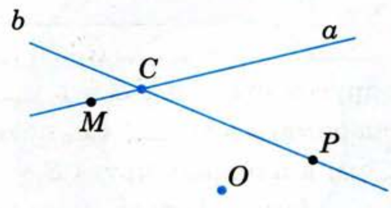


Р е ш е н и е. Построим точки A_1, B_1, C_1, симметричные точкам A, B, C относительно ______________ a, и проведем отрезки A_1B_1, B_1C_1 и ________

Так как при движении, в частности при осевой симметрии, треугольник отображается на равный ему ____________________ , то искомой фигурой является треугольник __________ , равный треугольнику __________

87

На рисунке даны точка O и две пересекающиеся прямые a и b. Постройте прямые, на которые отображаются прямые a и b при центральной симметрии с центром O.



Р е ш е н и е. Отметим на прямой a какую-нибудь точку M, а на прямой b — точку P так, чтобы эти точки не совпадали с точкой C.

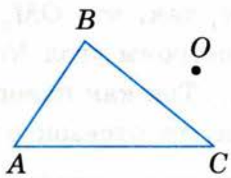
Затем построим точки M_1, C_1 и P_1, симметричные ______ M, C и __ относительно точки O. Так как при движении, в частности при центральной ______, прямая отображается на ______, то при данной ______ симметрии прямая MC отображается на прямую ______, прямая PC — на прямую ______ Итак, пересекающиеся в точке C_1 прямые ____ и ____ — искомые.

88

На рисунке даны точка O и треугольник ABC. Постройте фигуру F, на которую отображается треугольник ABC при центральной симметрии с центром O. Что представляет собой фигура F?

Решение. Построим точки A_1, B_1 и C_1, симметричные точкам A, B и __ относительно ______ O, и проведем отрезки A_1B_1, B_1C_1 и ______

Так как при движении, в частности при центральной ______, треугольник отображается на равный ему ______, то искомой фигурой F является треугольник ______, равный треугольнику ______

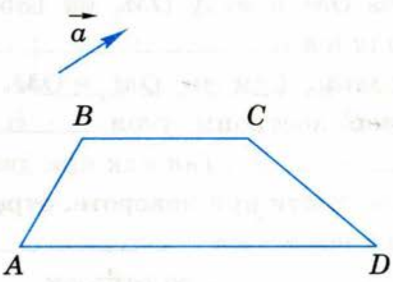


§ 2 Параллельный перенос и поворот

89

Постройте фигуру, на которую отображается данная трапеция $ABCD$ при параллельном переносе на данный вектор $\vec{a}$.

Решение. Построим точки A_1, B_1, C_1 и D_1, которые получаются из точек A, B, C и D параллельным переносом на вектор $\vec{a}$, и проведем отрезки A_1B_1, B_1C_1, C_1D_1 и D_1A_1. Так как при движении любая фигура отображается на ______, то искомой фигурой является трапеция ______

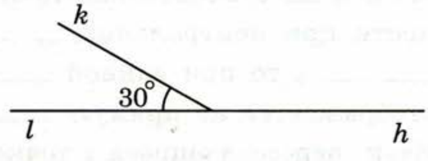


90

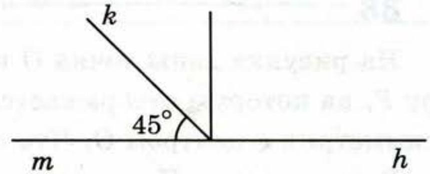
Даны отрезок MN и точка O. Постройте отрезок M_1N_1, который получается из данного отрезка MN поворотом вокруг данного центра O:

а) на угол 150° по часовой стрелке;

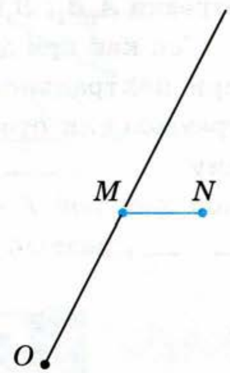
б) на угол 135° против часовой стрелки.



а)



б)



Р е ш е н и е.

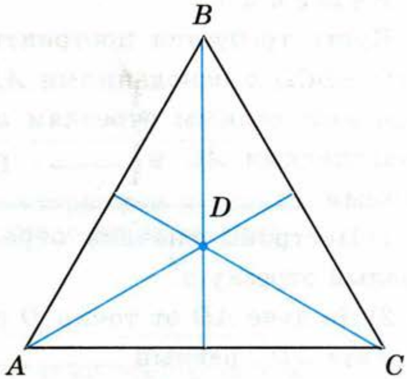
а) Построим сначала угол hk, равный 150°. Таким углом является, например, угол, смежный с ______________ Затем от луча OM отложим угол MOK, равный построенному ________ hk, так, чтобы поворот от луча OM к лучу OK на 150° осуществлялся по часовой ______________, и отметим на луче OK __________ M_1 так, что $OM_1 = OM$. Аналогично построим угол NON_1, причем $ON_1 =$ ______. Так как поворот является движением, то отрезок отображается на ______________________________________ Следовательно, отрезок ____________ — искомый.

б) Построим сначала угол hk, равный 135°. Таким углом является, например, угол, смежный с ________________. Затем от луча OM отложим __________ MOM_1, равный построенному углу ______, так, чтобы ________________ от луча OM к лучу OM_1 на 135° осуществлялся ______________________________ стрелки, причем $OM_1 = OM$. Аналогично построим угол ____________, где ______ = ______. Так как при движении, в частности при повороте, отрезок отображается на ______________________ ________________, то отрезок __________ — искомый.

91

На рисунке точка D является точкой пересечения биссектрис равностороннего треугольника ABC. Докажите, что при повороте вокруг точки D на угол 120° треугольник ABC отображается на себя. (Задача 1168 учебника.)

Решение.

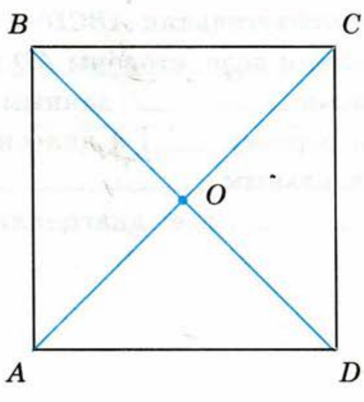


Рассмотрим, например, поворот по часовой стрелке. Каждый из углов A и B треугольника ABD равен $\frac{1}{2} \cdot$ _____ = _____ . Следовательно, DA = _____ и $\angle ADB$ = _____ . Поэтому при повороте вокруг точки D на угол 120° по часовой стрелке вершина A отображается в вершину ___ . По аналогичной причине вершина B отображается в вершину ___ , а вершина C — в вершину ___ . Следовательно, треугольник ABC отображается на ____________________ ABC, т. е. на себя.

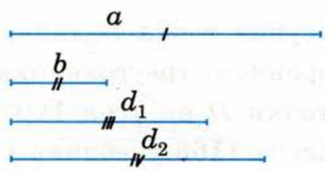
92

Докажите, что при повороте квадрата вокруг точки пересечения его диагоналей на угол 90° квадрат отображается на себя. (Задача 1169 учебника.)

Решение.

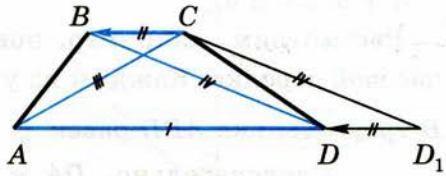


Диагонали квадрата равны, взаимно __________________________ и делятся точкой пересечения ________________ Следовательно, при повороте вокруг точки O пересечения диагоналей на ______ 90° каждая из вершин квадрата $ABCD$ отображается в соседнюю __________ этого квадрата, а значит, квадрат отображается на _________



Используя параллельный перенос, постройте трапецию по ее основаниям и диагоналям. (Задача 1182 учебника.)

Р е ш е н и е.



Пусть требуется построить трапецию $ABCD$ с основаниями AD и BC, равными данным отрезкам a и b, и диагоналями AC и ______, равными данным ______________________ d_1 и d_2.

1) Построим сначала отрезок AD, равный отрезку a.

2) На луче AD от точки D отложим отрезок DD_1, равный ______________ b.

3) Построим треугольник ACD_1, стороны AC и CD_1 которого равны данным отрезкам d_1 и d_2.

4) Построим точку B, в которую отображается точка C при параллельном ______________ на вектор $\overrightarrow{D_1D}$.

Выполните указанные построения самостоятельно.

Четырехугольник $ABCD$ — искомая трапеция.

В самом деле, стороны AD и BC этого четырехугольника параллельны и ___________ данным отрезкам ____ и ____, диагональ AC равна отрезку ____, а диагональ BD получается из отрезка CD_1 параллельным ______________________ на вектор ______. Поэтому BD = _______, т. е. диагональ BD равна данному отрезку _____

ОГЛАВЛЕНИЕ

Учебно-методический комплект по геометрии для 7 – 9 классов:

В. Ф. Бутузов
РАБОЧАЯ ПРОГРАММА
к учебнику Л. С. Атанасяна и др.

Л. С. Атанасян, В. Ф. Бутузов, С. Б. Кадомцев, Э. Г. Позняк, И. И. Юдина
УЧЕБНИК

Л. С. Атанасян, В. Ф. Бутузов, Ю. А. Глазков, И. И. Юдина
РАБОЧИЕ ТЕТРАДИ

Б. Г. Зив, В. М. Мейлер
ДИДАКТИЧЕСКИЕ МАТЕРИАЛЫ

М. А. Иченская
САМОСТОЯТЕЛЬНЫЕ И КОНТРОЛЬНЫЕ РАБОТЫ

Т. М. Мищенко, А. Д. Блинков
ТЕМАТИЧЕСКИЕ ТЕСТЫ

Л. С. Атанасян, В. Ф. Бутузов, Ю. А. Глазков, В. Б. Некрасов, И. И. Юдина
ИЗУЧЕНИЕ ГЕОМЕТРИИ
в 7 – 9 классах

Б. Г. Зив, В. М. Мейлер, А. Г. Баханский
ЗАДАЧИ ПО ГЕОМЕТРИИ
для 7 – 11 классов

ISBN 978-5-09-032127-3
9 785090 321273

ПРОСВЕЩЕНИЕ
ИЗДАТЕЛЬСТВО