

# Геометрия

## РАБОЧАЯ ТЕТРАДЬ



8



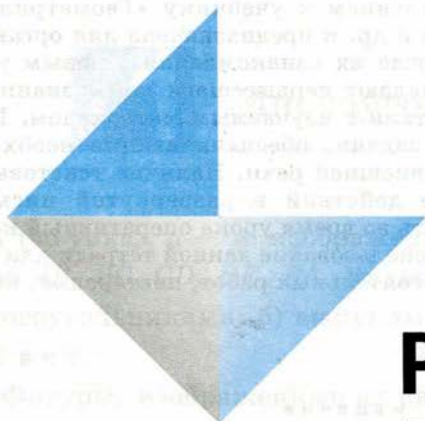
ПРОСВЕЩЕНИЕ  
ИЗДАТЕЛЬСТВО

**СООТВЕТСТВИЕ МЕЖДУ ПУНКТАМИ УЧЕБНИКА И ЗАДАЧАМИ ТЕТРАДИ**

Номера пунктов учебника	Тема	Номера задач тетради
39, 40 41	Многоугольник. Выпуклый многоугольник Четырехугольник	1—5 6, 7
42 43 44	Параллелограмм Признаки параллелограмма Трапеция Задачи на построение	8—14 15 16—18 19, 20
45 46 47	Прямоугольник Ромб и квадрат Осевая и центральная симметрии	21—23 24 25, 26
48 49, 50	Понятие площади многоугольника Площадь квадрата. Площадь прямоугольника	27 28—32
51 52 53 54 55	Площадь параллелограмма Площадь треугольника Площадь трапеции Теорема Пифагора Теорема, обратная теореме Пифагора	33—35 36—41 42—44 45—48 49, 50
56, 57 58	Пропорциональные отрезки. Определение подобных треугольников Отношение площадей подобных треугольников	51—53 54
59 60 61	Первый признак подобия треугольников Второй признак подобия треугольников Третий признак подобия треугольников	55—58 59 60
62 63 64	Средняя линия треугольника Пропорциональные отрезки в прямоугольном треугольнике Практические приложения подобия треугольников	61—65 66—68 69, 70
66 67	Синус, косинус и тангенс острого угла прямоугольного треугольника Значения синуса, косинуса и тангенса для углов $30^\circ$ , $45^\circ$ и $60^\circ$	71—73 74—77
68 69	Взаимное расположение прямой и окружности Касательная к окружности	78, 79 80—84
70 71	Градусная мера дуги окружности Теорема о вписанном угле	85, 86 87—94
72 73	Свойства биссектрисы угла и серединного перпендикуляра к отрезку Теорема о пересечении высот треугольника	95—102 103
74 75	Вписанная окружность Описанная окружность	104—108 109—111
76, 77 78	Понятие вектора. Равенство векторов Откладывание вектора от данной точки	112 113, 114
79 80, 81 82	Сумма двух векторов Законы сложения векторов. Правило параллелограмма. Сумма нескольких векторов Вычитание векторов	115, 116 117—121 122—128
83 84 85	Произведение вектора на число Применение векторов к решению задач Средняя линия трапеции	129—133 134 135—137



# ГЕОМЕТРИЯ



## РАБОЧАЯ ТЕТРАДЬ

**8** КЛАСС

Пособие  
для учащихся  
общеобразовательных  
организаций

16-е издание

Москва  
«Просвещение»  
2014

А в т о р ы:

Л. С. Атанасян, В. Ф. Бутузов, Ю. А. Глазков, И. И. Юдина

Рабочая тетрадь является дополнением к учебнику «Геометрия, 7—9» авторов Л. С. Атанасяна, В. Ф. Бутузова и др. и предназначена для организации решения задач учащимися на уроке после их ознакомления с новым учебным материалом. На этом этапе учащиеся делают первые шаги по осознанию нового материала, освоению основных действий с изучаемым материалом. Поэтому в тетрадь включены только базовые задачи, обеспечивающие необходимую репродуктивную деятельность в форме внешней речи. Наличие текстовых заготовок облегчает ученику выполнение действий в развернутой письменной форме, а учителю позволяет осуществлять во время урока оперативный контроль и коррекцию деятельности учащихся. Использование данной тетради для организации других видов деятельности (самостоятельных работ, повторения, контроля и т. д.) малоэффективно.

Учебное издание

**Атанасян Левон Сергеевич**  
**Бутузов Валентин Федорович**  
**Глазков Юрий Александрович**  
**Юдина Ирина Игоревна**

## ГЕОМЕТРИЯ

Рабочая тетрадь  
8 класс

Пособие для учащихся  
общеобразовательных организаций

Зав. редакцией *Т. А. Бурмистрова*. Редактор *Л. В. Кузнецова*. Младший редактор *Н. В. Ноговицина*. Художники *В. А. Андрианов*, *В. В. Костин*, *О. П. Богомолова*. Художественный редактор *О. П. Богомолова*. Компьютерная верстка *Е. А. Стрижевской*, *О. С. Ивановой*. Технический редактор *Е. Н. Зелянина*. Корректор *Н. Д. Цухай*.

Налоговая льгота — Общероссийский классификатор продукции ОК 005-93—953000.  
Изд. лиц. Серия ИД № 05824 от 12.09.01. Подписано в печать 03.03.14. Формат 70×100<sup>1/16</sup>.  
Бумага офсетная. Гарнитура SchoolBookCSanPin. Печать офсетная. Уч.-изд. л. 3,27.  
Доп. тираж 70 000 экз. Заказ № 7714.

Открытое акционерное общество «Издательство «Просвещение».  
127521, Москва, 3-й проезд Марьиной рощи, 41.

Отпечатано в ОАО «Тверской полиграфический комбинат»  
170024, г. Тверь, пр-т. Ленина, д. 5,  
телефон: +7(4822)44-43-60, факс: +7(4822)44-98-42,  
E-mail: [tpk@tverpk.ru](mailto:tpk@tverpk.ru); [sales@tverpk.ru](mailto:sales@tverpk.ru)

ISBN 978-5-09-031784-9

© Издательство «Просвещение», 1999  
© Художественное оформление.  
Издательство «Просвещение», 2013  
Все права защищены

§ 1

Многоугольники

1

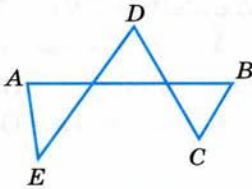
На рисунках *a — ж* изображены фигуры, составленные из отрезков  $AB, BC, CD, DE, EA$ . Укажите, какие из них являются:

а) многоугольниками; б) выпуклыми многоугольниками.

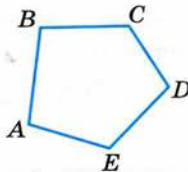
О т в е т .

а) Фигуры, изображенные на рисунках \_\_\_\_\_

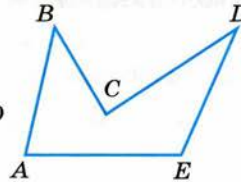
б) Многоугольники, изображенные на рисунках \_\_\_\_\_



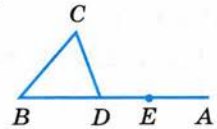
а)



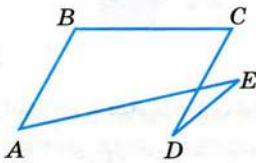
б)



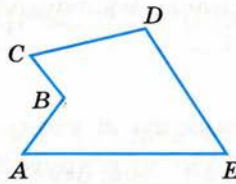
в)



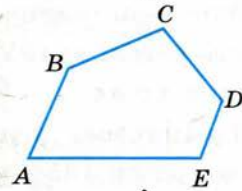
г)



д)



е)

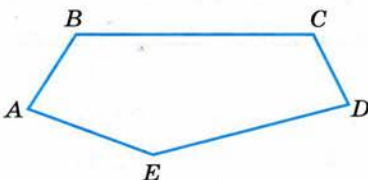


ж)

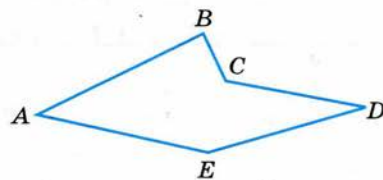
2

Проведите все диагонали в многоугольниках, изображенных на рисунках *a, б*, и выпишите их.

О т в е т . а) \_\_\_\_\_ ; б) \_\_\_\_\_



а)



б)

### 3

Начертите выпуклый семиугольник и из какой-нибудь его вершины проведите все возможные диагонали.

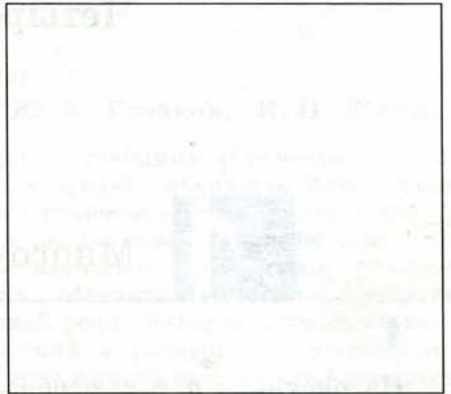
а) Сколько при этом образовалось треугольников?

б) Найдите сумму углов семиугольника.

О т в е т .

а) \_\_\_\_\_

б) \_\_\_\_\_°.



### 4

Используя формулу для вычисления суммы углов выпуклого многоугольника  $S_n = 180^\circ(n - 2)$ , найдите сумму углов выпуклого:

а) одиннадцатиугольника:  $S_{11} = 180^\circ \cdot \underline{\hspace{2cm}} = \underline{\hspace{2cm}}$

б) двадцатидвухугольника:  $S_{22} = 180^\circ \cdot \underline{\hspace{2cm}} = \underline{\hspace{2cm}}$

О т в е т .

а) \_\_\_\_\_°;

б) \_\_\_\_\_°.

### 5

Найдите число сторон выпуклого многоугольника, каждый угол которого равен: а)  $135^\circ$ ; б)  $150^\circ$ .

Р е ш е н и е .

а) Сумма всех углов выпуклого  $n$ -угольника, каждый угол которого равен  $135^\circ$ , равна  $135^\circ \cdot n$ ; с другой стороны, она равна  $(n - 2) \cdot 180^\circ$ . Таким образом,  $135^\circ \cdot n = (n - 2) \cdot 180^\circ$ , или  $135^\circ \cdot n = 180^\circ \cdot n - 360^\circ$ , откуда  $45^\circ \cdot n = 360^\circ$ ,  $n = 8$ .

б) \_\_\_\_\_

\_\_\_\_\_

\_\_\_\_\_

О т в е т .

а)  $n = 8$ ;

б)  $n = \underline{\hspace{2cm}}$



Найдите сторону  $BC$  четырехугольника  $ABCD$ , если его периметр равен 22 см, сторона  $AB$  на 2 см больше стороны  $BC$  и на 2 см меньше каждой из сторон  $DA$  и  $CD$ .

Решение.

По условию  $P_{ABCD} = AB + BC + CD + DA = 22$  см,  $BC = AB -$   
 $2$ ,  $CD = DA = AB + 2$

Итак,  $22$  см =  $AB + BC + CD + DA = AB + (AB - 2) + (AB + 2) + (AB + 2) = 4AB + 2$ ,  
откуда  $AB = 5$ , а  $BC = 3$

Ответ.  $BC = 3$

Найдите углы  $B$ ,  $C$  и  $D$  выпуклого четырехугольника  $ABCD$ , если  $\angle A = \angle B$ ,  $\angle C = \angle D$  и  $\angle A = 35^\circ$ .

Решение.

Так как по условию  $\angle A = \angle B$  и  $\angle A = 35^\circ$ , то  $\angle A + \angle B = 35^\circ \times 2 = 70^\circ$ . Сумма углов выпуклого четырехугольника равна  $360^\circ$ , поэтому  $\angle C + \angle D = 360^\circ - 70^\circ = 290^\circ$

По условию  $\angle C = \angle D$ , значит, каждый из них равен  $145^\circ$

Ответ.  $\angle B = 35^\circ$ ,  $\angle C = 145^\circ$ ,  $\angle D = 145^\circ$

## § 2

### Параллелограмм и трапеция

В параллелограмме  $ABCD$  найдите: а) стороны, если  $BC$  на 8 см больше стороны  $AB$ , а периметр равен 64 см; б) углы, если  $\angle A = 38^\circ$ .

Решение.

а) По свойству параллелограмма  $AB = CD$ ,  $BC = AD$  и  $\angle A = \angle C$ ,  $\angle B = \angle D$ . По условию  $P_{ABCD} = 64$  см, следовательно,  $2(AB + BC) = 64$ , откуда  $AB + BC = 32$ , но  $BC$  на 8 см больше  $AB$ , поэтому  $AB + (AB + 8) = 32$  см, откуда  $AB = 12$  см,  $BC = 12 + 8 = 20$  см

б) По условию  $\angle A = 38^\circ$ , а так как  $\angle A + \angle B = 180^\circ$ , то  $\angle B = 180^\circ - 38^\circ = 142^\circ$ .

Ответ. а)  $AB = 12$  см,  $BC = 20$  см;

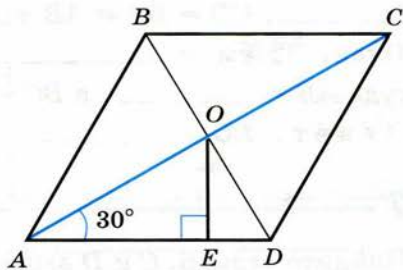
б)  $\angle C = 38^\circ$ ,  $\angle D = 142^\circ$ .

В параллелограмме  $ABCD$  диагональ  $AC$ , равная 24 см, образует со стороной  $AD$  угол в  $30^\circ$ ,  $O$  — точка пересечения диагоналей  $AC$  и  $BD$ ,  $OE \perp AD$ . Найдите длину отрезка  $OE$ .

Решение.

Диагонали параллелограмма точкой пересечения \_\_\_\_\_, поэтому  $AO = \underline{\quad} = \underline{\quad}$  см. Треугольник  $AOE$  — прямоугольный с гипотенузой \_\_\_\_\_ и острым углом  $A$ , равным \_\_\_\_\_ $^\circ$ . Поэтому катет  $OE$ , лежащий против угла в \_\_\_\_\_ $^\circ$ , равен \_\_\_\_\_, т. е.  $OE = \underline{\quad}$  см = \_\_\_\_\_ см.

Ответ. \_\_\_\_\_ см.



## 10

Биссектриса угла  $A$  параллелограмма  $ABCD$  пересекает сторону  $BC$  в точке  $P$ , причем  $BP = PC$ . Найдите стороны параллелограмма, если его периметр равен 54 см.

Решение.

1)  $\angle 1 = \angle 2$ , так как луч  $AP$  — \_\_\_\_\_,  $\angle 2 = \angle 3$ , так как эти углы \_\_\_\_\_ при пересечении параллельных прямых \_\_\_\_\_ секущей \_\_\_\_\_. Следовательно,  $\angle 1 = \angle 3$ .

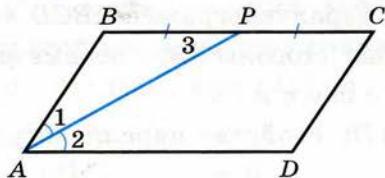
2) Треугольник  $ABP$  — \_\_\_\_\_, так как его углы 1 и 3 равны, поэтому  $AB = \underline{\quad}$

3) По условию  $BP = PC$ , следовательно,  $BC = \underline{\quad} BP = \underline{\quad} AB$ .

Итак,  $P_{ABCD} = 2(AB + \underline{\quad}) = \underline{\quad} AB$ .

Так как периметр параллелограмма равен 54 см, то \_\_\_\_\_  $AB = 54$  см, откуда  $AB = \underline{\quad}$  см и  $BC = \underline{\quad}$  см.

Ответ.  $AB = DC = \underline{\quad}$  см,  
 $BC = AD = \underline{\quad}$  см.

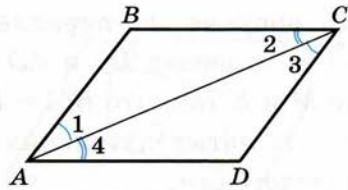




## 11

На рисунке в четырехугольнике  $ABCD$   $\angle 1 = \angle 3$ ,  $\angle 2 = \angle 4$ .

Докажите, что четырехугольник  $ABCD$  — параллелограмм.



**Доказательство.**

1) Так как  $\angle 1 = \angle 3$ , а эти углы — \_\_\_\_\_ при пересечении прямых \_\_\_\_\_ и \_\_\_\_\_ секущей \_\_\_\_\_, то прямые \_\_\_\_\_ и \_\_\_\_\_ параллельны.

2) Так как  $\angle 2 = \angle 4$ , то прямые \_\_\_\_\_ и \_\_\_\_\_ также параллельны.

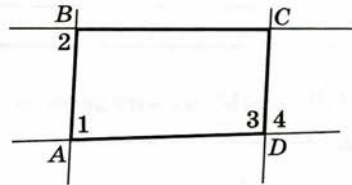
Итак, четырехугольник  $ABCD$  — параллелограмм, так как его стороны \_\_\_\_\_

## 12

Является ли четырехугольник  $ABCD$  на рисунке параллелограммом, если:

а)  $\angle 1 = 75^\circ$ ,  $\angle 3 = 105^\circ$ ,  $\angle 2 \neq \angle 4$ ;

б)  $\angle 1 = \angle 2 = 70^\circ$ ,  $\angle 3 = 105^\circ$ ?



**Решение.**

а) В четырехугольнике  $ABCD$  две стороны  $AB$  и  $CD$  параллельны, так как  $\angle 1 + \angle 3 = 75^\circ + 105^\circ = 180^\circ$ , а эти углы — односторонние при пересечении прямых  $AB$  и  $DC$  секущей  $AD$ . Поскольку  $AB \parallel DC$ , то  $\angle 1 = \angle 4$  (как соответственные углы). Две другие стороны  $AD$  и  $BC$  четырехугольника  $ABCD$  не параллельны, так как накрест лежащие углы 1 и 2 не равны ( $\angle 1 = \angle 4 \neq 2$ ). Следовательно, четырехугольник  $ABCD$  не является параллелограммом.

б) \_\_\_\_\_

---



---



---



---



---

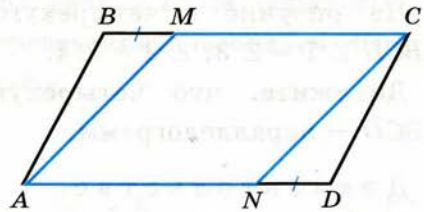


---

**О т в е т.** а) Нет; б) \_\_\_\_\_

### 13

На рисунке в параллелограмме  $ABCD$  на сторонах  $BC$  и  $AD$  отмечены точки  $M$  и  $N$  так, что  $BM = DN$ . Докажите, что четырехугольник  $AMCN$  — параллелограмм.



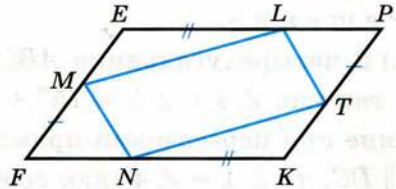
**Доказательство.**

Так как по условию  $ABCD$  — параллелограмм, то его противоположные стороны  $BC$  и  $AD$  \_\_\_\_\_ и \_\_\_\_\_, т. е. \_\_\_\_\_  $\parallel$  \_\_\_\_\_, \_\_\_\_\_ = \_\_\_\_\_. Так как  $MC =$  \_\_\_\_\_ - \_\_\_\_\_,  $AN =$  \_\_\_\_\_ - \_\_\_\_\_, и так как  $BM = DN$ , то  $MC =$  \_\_\_\_\_.

Таким образом, в четырехугольнике  $AMCN$  две противоположные стороны \_\_\_\_\_ и \_\_\_\_\_ (\_\_\_\_\_  $\parallel$  \_\_\_\_\_, \_\_\_\_\_ = \_\_\_\_\_), следовательно,  $AMCN$  — \_\_\_\_\_.

### 14

На сторонах параллелограмма  $EFKP$  отмечены точки  $M, N, T, L$  так, как показано на рисунке, причем  $FM = PT$ ,  $EL = KN$ . Докажите, что четырехугольник  $MLTN$  — параллелограмм.



**Доказательство.**

1) Так как  $EFKP$  — параллелограмм, то по свойствам параллелограмма  $\angle F = \angle$  \_\_\_\_\_,  $\angle E = \angle$  \_\_\_\_\_ и  $EF =$  \_\_\_\_\_,  $EP =$  \_\_\_\_\_. По условию  $FM = PT$ ,  $EL = KN$  и  $EM = EF -$  \_\_\_\_\_,  $KT = PK -$  \_\_\_\_\_, поэтому  $EM =$  \_\_\_\_\_,  $PL =$  \_\_\_\_\_.

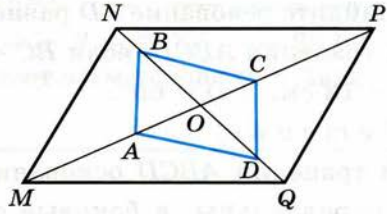
2)  $\triangle MEL = \triangle$  \_\_\_\_\_ по \_\_\_\_\_. Из равенства этих треугольников следует равенство сторон  $ML$  и \_\_\_\_\_.

3) Аналогично  $\triangle MFN = \triangle$  \_\_\_\_\_, откуда  $MN =$  \_\_\_\_\_.

Итак, в четырехугольнике  $MLTN$  противоположные стороны \_\_\_\_\_ и \_\_\_\_\_, \_\_\_\_\_ и \_\_\_\_\_ попарно \_\_\_\_\_, следовательно,  $MLTN$  — параллелограмм.

## 15

На рисунке диагонали параллелограмма  $MNPQ$  пересекаются в точке  $O$ . Докажите, что четырехугольник  $ABCD$  является параллелограммом, если  $OA = \frac{1}{3} OM$ ,  $OB = \frac{2}{3} ON$ ,  $OC = \frac{1}{3} OP$ ,  $OD = \frac{2}{3} OQ$ .



**Доказательство.**

По свойству параллелограмма диагонали  $MP$  и  $NQ$  точкой пересечения  $O$  \_\_\_\_\_, т. е. \_\_\_\_\_ = \_\_\_\_\_ и \_\_\_\_\_ = \_\_\_\_\_, поэтому  $OA = \frac{1}{3} OM$ , аналогично  $OB = \frac{2}{3} ON$

Итак, в четырехугольнике  $ABCD$  диагонали  $AC$  и  $BD$  точкой пересечения  $O$  \_\_\_\_\_, поэтому  $ABCD$  — \_\_\_\_\_

## 16

Найдите углы  $M$  и  $P$  трапеции  $MNPQ$  с основаниями  $MQ$  и  $NP$ , если  $\angle N = 109^\circ$ , а  $\angle Q = 37^\circ$ .

**Решение.**

Углы  $M$  и  $N$ ,  $P$  и  $Q$  — \_\_\_\_\_ при пересечении параллельных прямых  $MQ$  и  $NP$  секущими \_\_\_\_\_ и \_\_\_\_\_, поэтому  $\angle M + \angle N = \text{_____}^\circ$ ,  $\angle P + \angle Q = \text{_____}^\circ$ . Так как по условию  $\angle N = 109^\circ$ ,  $\angle Q = 37^\circ$ , то  $\angle M = \text{_____}^\circ - \angle N = \text{_____}^\circ$ ,  $\angle P = \text{_____}^\circ - \angle Q = \text{_____}^\circ$ .

**Ответ.**  $\angle M = \text{_____}^\circ$ ,  $\angle P = \text{_____}^\circ$ .

## 17

Один из углов равнобедренной трапеции равен  $115^\circ$ . Найдите остальные углы трапеции.

**Решение.**

Пусть в равнобедренной трапеции  $ABCD$ , где  $AD$  и  $BC$  — основания,  $\angle B = 115^\circ$ . Так как углы при каждом основании равнобедренной трапеции \_\_\_\_\_, то  $\angle C = \angle \text{_____} = \text{_____}^\circ$ , а так как сумма углов, прилежащих к боковой стороне трапеции, равна  $\text{_____}^\circ$ , то  $\angle A = \angle D = \text{_____}^\circ - \angle B = \text{_____}^\circ - 115^\circ = \text{_____}^\circ$ .

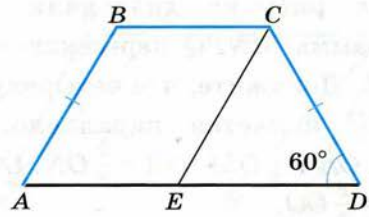
**Ответ.**  $\angle A = \angle D = \text{_____}^\circ$ ,  $\angle C = \text{_____}^\circ$ .



Найдите основание  $AD$  равнобедренной трапеции  $ABCD$ , если  $BC = 10$  см,  $AB = 12$  см,  $\angle D = 60^\circ$ .

**Решение.**

В трапеции  $ABCD$  основания  $AD$  и  $BC$  параллельны, а боковые стороны  $AB$  и  $CD$  равны.



Проведем прямую  $CE$ , параллельную стороне  $AB$ . Полученный четырехугольник  $ABCE$  — \_\_\_\_\_, так как его стороны попарно \_\_\_\_\_. Поэтому  $AE = \underline{\hspace{1cm}} = \underline{\hspace{1cm}}$  см,  $CE = \underline{\hspace{1cm}} = \underline{\hspace{1cm}}$  см, и так как  $CD = AB$ , то  $CE = CD = \underline{\hspace{1cm}}$  см.

Треугольник  $CDE$  — \_\_\_\_\_ ( $\underline{\hspace{1cm}} = \underline{\hspace{1cm}}$ ) с углом при основании в  $60^\circ$ , следовательно, этот треугольник — \_\_\_\_\_ и  $ED = \underline{\hspace{1cm}} = \underline{\hspace{1cm}}$  см. Значит,  $AD = AE + \underline{\hspace{1cm}} = 10$  см + \_\_\_\_\_ см = \_\_\_\_\_ см.

**О т в е т.**  $AD = \underline{\hspace{1cm}}$  см.

## Задачи на построение

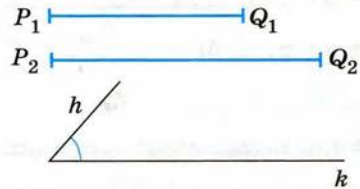
Постройте параллелограмм  $ABCD$  так, чтобы его смежные стороны  $AB$  и  $AD$  были равны соответственно данным отрезкам  $P_1Q_1$  и  $P_2Q_2$ , а угол  $A$  был равен данному углу  $hk$  (рисунок а).

**Решение.**

1) На рисунке б построим треугольник  $ABD$  по \_\_\_\_\_

\_\_\_\_\_ так, что  $AB = P_1Q_1$ ,  $AD = P_2Q_2$  и  $\angle A = \angle hk$ .

2) Построим треугольник  $BCD$  по трем сторонам (сторона  $BD$  построена,  $BC = AD = P_2Q_2$ ,  $CD = AB = P_1Q_1$ ) так, чтобы точки  $A$  и  $C$  лежали по разные стороны от прямой  $BD$ .



а)



б)

Четырехугольник  $ABCD$  — искомый. Действительно, так как по построению  $AB = \underline{\hspace{2cm}}$  и  $BC = \underline{\hspace{2cm}}$ , то  $ABCD$  —  $\underline{\hspace{4cm}}$ . А так как  $AB = P_1Q_1$ ,  $AD = \underline{\hspace{2cm}}$  и  $\angle A = \angle \underline{\hspace{2cm}}$  по построению, то параллелограмм  $ABCD$  отвечает всем условиям задачи.

## 20

Разделите данный на рисунке отрезок  $AB$  на 5 равных частей.

**Решение.**

На рисунке проведем луч  $AХ$ , не лежащий на прямой  $AB$ , и на нем от точки  $A$  отложим пять  $\underline{\hspace{2cm}}$  друг другу отрезков  $AA_1, A_1A_2, A_2A_3, A_3A_4, A_4A_5$ . Проведем прямую  $A_5B$  и построим прямые, проходящие через точки  $A_1, A_2, A_3, A_4$  и параллельные прямой  $\underline{\hspace{2cm}}$ . Эти прямые пересекают отрезок  $AB$  в точках  $B_1, B_2, B_3, B_4$ , которые по теореме Фалеса (задача 385) делят отрезок  $\underline{\hspace{2cm}}$  на  $\underline{\hspace{2cm}}$

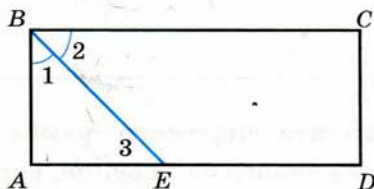


## § 3

### Прямоугольник, ромб, квадрат

## 21

Найдите периметр прямоугольника  $ABCD$ , изображенного на рисунке, если биссектриса угла  $B$  пересекает сторону  $AD$  в точке  $E$  и делит ее на отрезки  $AE = 17$  см и  $ED = 21$  см.



**Решение.**

1) Так как  $ABCD$  — прямоугольник, то  $AD \parallel \underline{\hspace{2cm}}$  и поэтому  $\angle 2 = \angle \underline{\hspace{2cm}}$ . Но  $\angle 2 = \angle \underline{\hspace{2cm}}$  по условию, следовательно,  $\angle 1 = \angle \underline{\hspace{2cm}}$  и  $\triangle ABE$  —  $\underline{\hspace{4cm}}$  с основанием  $\underline{\hspace{2cm}}$ . Значит,  $AB = \underline{\hspace{2cm}} = \underline{\hspace{2cm}}$  см.

2)  $AD = AE + ED = \underline{\hspace{2cm}} + \underline{\hspace{2cm}} = \underline{\hspace{2cm}}$ ;  $P_{ABCD} = 2(\underline{\hspace{2cm}} + \underline{\hspace{2cm}}) = 2(\underline{\hspace{2cm}} \text{ см} + \underline{\hspace{2cm}} \text{ см}) = 2 \cdot \underline{\hspace{2cm}} \text{ см} = \underline{\hspace{2cm}} \text{ см}$ .

О т в е т.  $P_{ABCD} = \underline{\hspace{2cm}}$  см.





3)  $P_{ABCD} = 4 \cdot \text{--- см} = \text{--- см}$ .

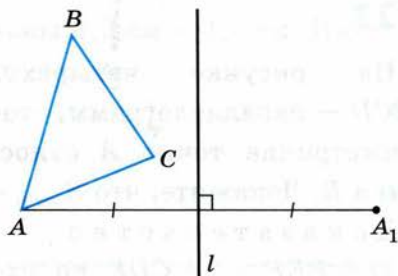
О т в е т .  $P_{ABCD} = \text{--- см}$ .

## 25

На рисунке изображены треугольник  $ABC$  и прямая  $l$ . Постройте треугольник  $A_1B_1C_1$ , симметричный треугольнику  $ABC$  относительно прямой  $l$ .

Р е ш е н и е .

Точка  $A_1$ , изображенная на рисунке, симметрична точке  $A$  относительно прямой  $l$ , так как прямая  $l$  — серединный перпендикуляр к отрезку  $AA_1$ . Через точки  $B$  и  $C$  проведем прямые, \_\_\_\_\_ к прямой  $l$ , и отметим на них точки  $B_1$  и  $C_1$  так, чтобы прямая  $l$  была \_\_\_\_\_ к отрезкам  $BB_1$  и \_\_\_\_\_. Проведем отрезки  $A_1B_1$ ,  $B_1C_1$ ,  $C_1A_1$  и получим искомый треугольник  $A_1B_1C_1$ .



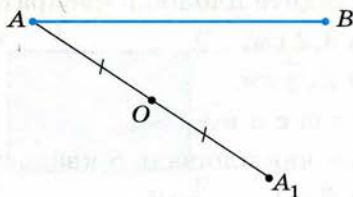
## 26

На рисунке изображены отрезок  $AB$  и точка  $O$ . Постройте отрезок  $A_1B_1$ , симметричный отрезку  $AB$  относительно точки  $O$ .

Р е ш е н и е .

Проведем прямую  $AO$  и отметим на ней точку  $A_1$  так, чтобы точка  $O$  была \_\_\_\_\_ отрезка  $AA_1$  (см. рисунок). Точка  $A_1$  \_\_\_\_\_ точке  $A$  относительно точки  $O$ .

Аналогичным образом построим точку  $B_1$ , \_\_\_\_\_ точке  $B$  относительно \_\_\_\_\_. Отрезок  $A_1B_1$  — искомый.



## § 1

## Площадь многоугольника

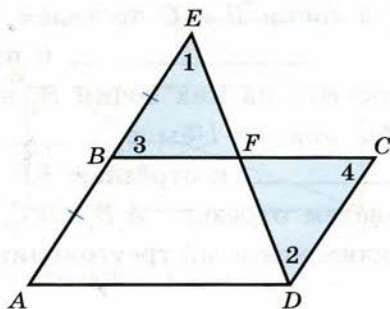
27

На рисунке четырехугольник  $ABCD$  — параллелограмм, точка  $E$  симметрична точке  $A$  относительно точки  $B$ . Докажите, что  $S_{ABCD} = S_{ADE}$ .

Доказательство.

1)  $\triangle BEF = \triangle CDF$  по стороне и двум прилежащим к ней углам ( $AB = \underline{\hspace{1cm}} = \underline{\hspace{1cm}}$ ,  $\angle 1 = \underline{\hspace{1cm}}$ ,  $\angle 3 = \underline{\hspace{1cm}}$ , так как эти углы  $\underline{\hspace{1cm}}$  при пересечении параллельных прямых  $\underline{\hspace{1cm}}$  и  $\underline{\hspace{1cm}}$  секущими  $\underline{\hspace{1cm}}$  и  $\underline{\hspace{1cm}}$ ), поэтому  $S_{BEF} = \underline{\hspace{1cm}}$

2)  $S_{ABCD} = S_{ABFD} + \underline{\hspace{1cm}}$ ,  $S_{ADE} = S_{ABFD} + \underline{\hspace{1cm}}$ , поэтому  $S_{ABCD} = \underline{\hspace{1cm}}$



28

Найдите площадь квадрата, если его сторона равна:

- а) 3,2 см;  
б)  $2\sqrt{3}$  дм.

Решение.

Так как площадь  $S$  квадрата со стороной  $a$  равна  $a^2$ , то:

- а)  $S = (\underline{\hspace{1cm}} \text{ см})^2 = \underline{\hspace{1cm}} \text{ см}^2$ ;  
б)  $S = (\underline{\hspace{1cm}} \text{ дм})^2 = \underline{\hspace{1cm}} \text{ дм}^2$ .

Ответ.

- а)  $\underline{\hspace{1cm}} \text{ см}^2$ ;  
б)  $\underline{\hspace{1cm}} \text{ дм}^2$ .

## 29

Найдите сторону  $a$  квадрата, если его площадь  $S$  равна: а)  $64 \text{ см}^2$ ;  
б)  $1,69 \text{ дм}^2$ .

Решение.

Так как площадь  $S$  квадрата со стороной  $a$  равна  $a^2$ , то  $a = \sqrt{\quad}$

а)  $a = \sqrt{\quad} \text{ см}^2 = \quad \text{ см}$ ; б)  $a = \sqrt{\quad} \text{ дм}^2 = \quad \text{ дм}$ .

О т в е т. а)  $\quad \text{ см}$ ; б)  $\quad \text{ дм}$ .

## 30

Смежные стороны прямоугольника равны  $4,2 \text{ см}$  и  $3,5 \text{ см}$ . Найдите площадь  $S$  этого прямоугольника.

Решение.

$S = \quad \text{ см} \cdot \quad \text{ см} = \quad \text{ см}^2$ .

О т в е т.  $\quad \text{ см}^2$ .

## 31

Пусть  $a$  и  $b$  — смежные стороны прямоугольника, а  $S$  — его площадь. Найдите сторону  $b$ , если  $a = 12 \text{ см}$ , а  $S = 192 \text{ см}^2$ .

Решение.

$192 \text{ см}^2 = \quad \text{ см} \cdot b$ , откуда  $b = \quad \text{ см}^2 : \quad \text{ см} = \quad \text{ см}$ .

О т в е т.  $b = \quad \text{ см}$ .

## 32

Площадь прямоугольника  $ABCD$ , изображенного на рисунке, равна  $Q$ , точка  $M$  — середина стороны  $DC$ . Найдите площадь треугольника  $ABE$ .

Решение.

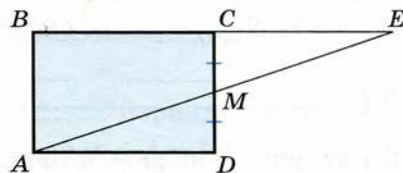
1)  $\triangle ADM = \triangle ECM$  по  $\quad$

$\quad$  ( $DM = \quad$  по условию,  
 $\angle D = \quad = \quad^\circ$ ,  $\angle AMD = \quad$ , так  
как эти углы  $\quad$

$\quad$ ), поэтому  $S_{ADM} = \quad$

2)  $S_{ABE} = S_{ABCM} + \quad = S_{ABCM} +$   
 $+ \quad = \quad = \quad$

О т в е т.  $S_{ABE} = \quad$





## 33

Пусть  $a$  — основание,  $h$  — высота,  $S$  — площадь параллелограмма. Найдите:

- а)  $S$ , если  $a = 16$  см,  $h = 9$  см;  
 б)  $a$ , если  $h = 4,8$  см,  $S = 48$  см<sup>2</sup>;  
 в)  $h$ , если  $a = 3,5$  дм,  $S = 14$  дм<sup>2</sup>.

Решение.

а)  $S = \underline{\hspace{2cm}} \cdot \underline{\hspace{2cm}} = \underline{\hspace{2cm}}$  см<sup>2</sup>;

б)  $48$  см<sup>2</sup> =  $a \cdot \underline{\hspace{2cm}}$  см, откуда  $a = \underline{\hspace{2cm}}$  см<sup>2</sup> :  $\underline{\hspace{2cm}}$  см =  $\underline{\hspace{2cm}}$  см;

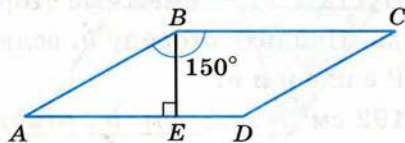
в)  $14$  дм<sup>2</sup> =  $3,5$  дм  $\cdot$   $h$ , откуда  $h = \underline{\hspace{2cm}}$  :  $\underline{\hspace{2cm}} = \underline{\hspace{2cm}}$  дм.

О т в е т. а)  $S = \underline{\hspace{2cm}}$  см<sup>2</sup>; б)  $a = \underline{\hspace{2cm}}$  см; в)  $h = \underline{\hspace{2cm}}$  дм.

## 34

На рисунке изображен параллелограмм  $ABCD$  с высотой  $BE$ .

Найдите  $S_{ABCD}$ , если  $AB = 13$  см,  $AD = 16$  см,  $\angle B = 150^\circ$ .



Решение.

1)  $\angle A = \underline{\hspace{2cm}}^\circ - 150^\circ = \underline{\hspace{2cm}}^\circ$ , так как сумма углов,  $\underline{\hspace{2cm}}$

равна  $\underline{\hspace{2cm}}^\circ$ .

2)  $\triangle ABE$  — прямоугольный с острым углом  $A$ , равным  $\underline{\hspace{2cm}}$ , поэтому  $BE = \underline{\hspace{2cm}} = \underline{\hspace{2cm}}$  см.

3)  $S_{ABCD} = \underline{\hspace{2cm}} \cdot \underline{\hspace{2cm}} = \underline{\hspace{2cm}}$  см<sup>2</sup>.

О т в е т.  $S_{ABCD} = \underline{\hspace{2cm}}$  см<sup>2</sup>.

## 35

На рисунке изображен параллелограмм  $ABCD$  с высотой  $BE$ . Найдите  $S_{ABCD}$ , если  $AE = ED$ ,  $BE = 3,2$  см,  $\angle A = 45^\circ$ .

Решение.

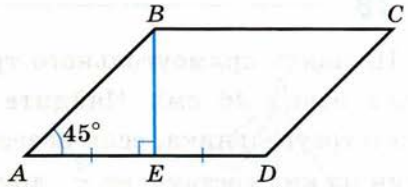
1)  $\triangle ABE$  — прямоугольный и  $\angle A = 45^\circ$ , следовательно,  $\angle B = \underline{\hspace{2cm}}^\circ$  и  $\triangle ABE$  —  $\underline{\hspace{2cm}}$ . Поэтому  $\underline{\hspace{2cm}} = BE = 3,2$  см.

2) Так как по условию  $AE = ED$ , то

$$AD = 2 \underline{\hspace{2cm}} = \underline{\hspace{2cm}}$$

$$3) S_{ABCD} = \underline{\hspace{2cm}} \cdot \underline{\hspace{2cm}} = \underline{\hspace{2cm}}$$

О т в е т .  $S_{ABCD} = \underline{\hspace{2cm}}$



### 36

Пусть  $a$  — основание,  $h$  — высота,  $S$  — площадь треугольника.

Найдите:

а)  $S$ , если  $a = 5,4$  см,  $h = 6$  см;

б)  $h$ , если  $a = 12$  см,  $S = 42$  см<sup>2</sup>;

в)  $a$ , если  $h = 2,4$  дм,  $S = 4,32$  дм<sup>2</sup>.

Р е ш е н и е .

а)  $S = \frac{1}{2} a \cdot h = \frac{1}{2} \underline{\hspace{2cm}} \cdot \underline{\hspace{2cm}} = \underline{\hspace{2cm}}$  см<sup>2</sup>;

б)  $h = \underline{\hspace{2cm}} : a = \underline{\hspace{2cm}} : \underline{\hspace{2cm}} = \underline{\hspace{2cm}}$  см;

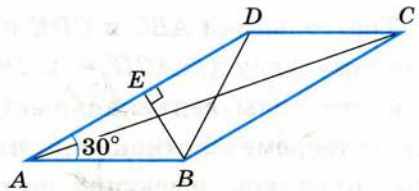
в)  $a = 2S : \underline{\hspace{2cm}} = \underline{\hspace{2cm}} : \underline{\hspace{2cm}} = \underline{\hspace{2cm}}$  дм.

О т в е т .

а)  $S = \underline{\hspace{2cm}}$  см<sup>2</sup>; б)  $h = \underline{\hspace{2cm}}$  см; в)  $a = \underline{\hspace{2cm}}$  дм.

### 37

На рисунке смежные стороны параллелограмма  $ABCD$ , равные 6 см и 10 см, образуют угол в  $30^\circ$ . Найдите площадь треугольника  $ABC$ .



Р е ш е н и е .

1) Пусть  $AB = 6$  см,  $AD = 10$  см,  $\angle A = 30^\circ$ . Так как диагональ параллелограмма делит его на два  $\underline{\hspace{2cm}}$ , то  $\triangle ABC = \triangle \underline{\hspace{2cm}}$ , и поэтому  $S_{ABC} = \underline{\hspace{2cm}} = \underline{\hspace{2cm}} S_{ABCD}$ .

2)  $S_{ABCD} = AD \cdot BE$ , где  $BE$  —  $\underline{\hspace{2cm}}$  параллелограмма. Остается найти  $BE$ .  $\triangle ABE$  — прямоугольный и  $\angle A = 30^\circ$ , поэтому катет  $\underline{\hspace{2cm}}$ , лежащий  $\underline{\hspace{2cm}}$ , равен

$\underline{\hspace{2cm}}$ , т. е.  $BE = \frac{1}{2} \underline{\hspace{2cm}} = \underline{\hspace{2cm}}$  см,

$S_{ABCD} = 10$  см  $\cdot$   $\underline{\hspace{2cm}}$  см =  $\underline{\hspace{2cm}}$  см<sup>2</sup>, а  $S_{ABC} = \frac{1}{2} \cdot \underline{\hspace{2cm}} = \underline{\hspace{2cm}}$  см<sup>2</sup>.

О т в е т .  $S_{ABC} = \underline{\hspace{2cm}}$  см<sup>2</sup>.

Площадь прямоугольного треугольника равна  $96 \text{ см}^2$ . Найдите катеты этого треугольника, если известно, что один из них составляет  $\frac{3}{4}$  другого.

**Решение.**

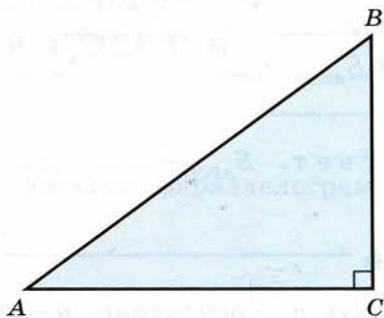
Пусть в прямоугольном треугольнике  $ABC$ , изображенном на рисунке,

$$BC = \frac{3}{4} AC.$$

Так как площадь прямоугольного треугольника равна половине произведения его катетов, то  $S_{ABC} = \frac{1}{2} \cdot \underline{\hspace{1cm}} \cdot \underline{\hspace{1cm}} = \frac{1}{2} \cdot \underline{\hspace{1cm}} \times \frac{3}{4} \underline{\hspace{1cm}} = \underline{\hspace{1cm}}$

По условию  $S_{ABC} = 96 \text{ см}^2$ , поэтому  $96 \text{ см}^2 = \underline{\hspace{1cm}}$ , откуда  $AC^2 = \underline{\hspace{1cm}} \text{ см}^2$  и  $AC = \underline{\hspace{1cm}} \text{ см}$ , а  $BC = \underline{\hspace{1cm}} \text{ см}$ .

**Ответ.**  $\underline{\hspace{1cm}}$  см и  $\underline{\hspace{1cm}}$  см.



## 39

На рисунке  $AC = 8 \text{ см}$ ,  $BC = 12 \text{ см}$ ,  $CD = 10 \text{ см}$ ,  $CE = 4 \text{ см}$ ,  $S_{ABC} = 48 \text{ см}^2$ .

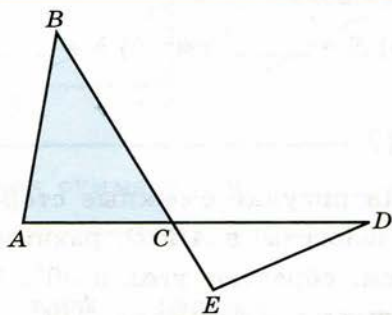
Найдите  $S_{CDE}$ .

**Решение.**

Треугольники  $ABC$  и  $CDE$  имеют по равному углу ( $\angle ACB = \angle DCE$ , так как эти углы вертикальные), поэтому по теореме об отношении площадей

треугольников, имеющих по равному углу, получаем  $S_{CDE} : S_{ABC} = \underline{\hspace{1cm}} \text{ см} \cdot \underline{\hspace{1cm}} \text{ см} : \underline{\hspace{1cm}} \text{ см} \cdot \underline{\hspace{1cm}} \text{ см} = \underline{\hspace{1cm}}$ , откуда  $S_{CDE} = \underline{\hspace{1cm}} S_{ABC}$ . Так как по условию  $S_{ABC} = 48 \text{ см}^2$ , то  $S_{CDE} = \underline{\hspace{1cm}} \times \underline{\hspace{1cm}} \text{ см}^2 = \underline{\hspace{1cm}} \text{ см}^2$ .

**Ответ.**  $S_{CDE} = \underline{\hspace{1cm}} \text{ см}^2$ .



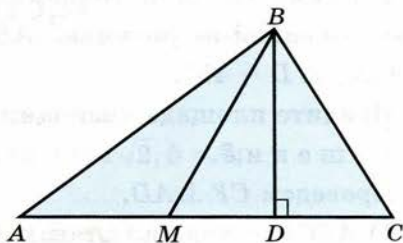
## 40

На рисунке точка  $M$  делит сторону  $AC$  треугольника  $ABC$  в отношении  $AM : MC = 2 : 3$ . Площадь треугольника  $ABC$  равна  $180 \text{ см}^2$ . Найдите площадь треугольника  $ABM$ .



Решение.

Треугольники  $ABM$  и  $ABC$  имеют общую высоту  $BD$ , поэтому их площади относятся как основания \_\_\_\_\_ и \_\_\_\_\_. Так как по условию  $AM : MC = 2 : 3$ , то  $AM : AC = \_\_\_\_\_\_ : \_\_\_\_\_\_$  и  $S_{ABM} : S_{ABC} = \_\_\_\_\_\_ : \_\_\_\_\_\_$ , откуда  $S_{ABM} = \_\_\_\_\_\_ S_{ABC} = \_\_\_\_\_\_ \cdot 180 \text{ см}^2 = \_\_\_\_\_\_ \text{ см}^2$ .



О т в е т. \_\_\_\_\_  $\text{см}^2$ .

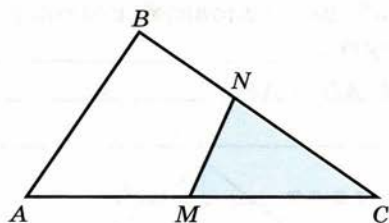
## 41

На рисунке  $CN = \frac{1}{2} AC$ ,  $CM = \frac{2}{3} BC$ ,  $S_{MNC} = 18 \text{ см}^2$ .

Найдите  $S_{ABC}$ .

Решение.

По теореме об отношении площадей треугольников, имеющих по равному углу,  $S_{ABC} : S_{MNC} = \_\_\_\_\_\_ : \_\_\_\_\_\_$



Так как по условию  $CM = \frac{2}{3} BC$ ,  $CN = \frac{1}{2} AC$  и  $S_{MNC} = 18 \text{ см}^2$ , то  $S_{ABC} = 18 \text{ см}^2 \cdot \frac{AC \cdot BC}{\frac{2}{3} BC \cdot \frac{1}{2} AC} = 18 \text{ см}^2 \cdot \_\_\_\_\_\_ = \_\_\_\_\_\_ \text{ см}^2$ .

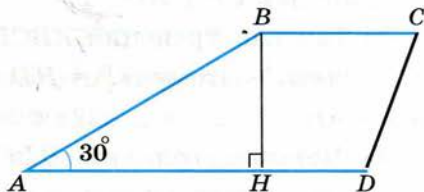
О т в е т.  $S_{ABC} = \_\_\_\_\_\_ \text{ см}^2$ .

## 42

В трапеции  $ABCD$ , изображенной на рисунке,  $AB = 12 \text{ см}$ ,  $AD = 15 \text{ см}$ ,  $BC = 7 \text{ см}$ ,  $\angle A = 30^\circ$ . Найдите площадь  $S$  трапеции.

Решение.

Проведем высоту  $BH$  трапеции  $ABCD$ .



1)  $\triangle ABH$  — прямоугольный,  $\angle H = 90^\circ$  по построению,  $\angle A = 30^\circ$  по условию, поэтому  $BH = \frac{1}{2} \_\_\_\_\_\_ = \_\_\_\_\_\_ \text{ см}$ .

2)  $S_{ABCD} = \frac{1}{2} (BC + \_\_\_\_\_\_) \cdot \_\_\_\_\_\_ = \_\_\_\_\_\_ \text{ см}^2 = \_\_\_\_\_\_ \text{ см}^2$ .

О т в е т. \_\_\_\_\_  $\text{см}^2$ .

В прямоугольной трапеции  $ABCD$ , изображенной на рисунке,  $AB = BC = 9$  см,  $\angle D = 45^\circ$ .

Найдите площадь трапеции.

Решение.

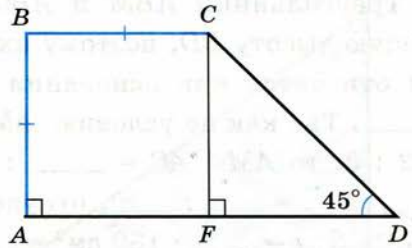
Проведем  $CF \perp AD$ .

1)  $ABCF$  — квадрат, так как у прямоугольника  $ABCF$  смежные стороны  $AB$  и \_\_\_\_\_, поэтому  $AF = CF =$  \_\_\_\_\_ см.

2)  $\triangle CFD$  — прямоугольный,  $\angle F = 90^\circ$  по построению,  $\angle D = 45^\circ$  по условию, поэтому  $\angle DCF =$  \_\_\_\_\_ $^\circ$  и, следовательно,  $\triangle CFD$  — \_\_\_\_\_ и  $DF =$  \_\_\_\_\_ = \_\_\_\_\_ см.

3)  $AD = AF +$  \_\_\_\_\_ = \_\_\_\_\_ см + \_\_\_\_\_ см = \_\_\_\_\_ см и  $S_{ABCD} =$  \_\_\_\_\_ = \_\_\_\_\_ = \_\_\_\_\_ см<sup>2</sup>.

Ответ. \_\_\_\_\_ см<sup>2</sup>.



В равнобедренной трапеции  $ABCD$ , изображенной на рисунке,  $BH$  — высота,  $\angle B = 135^\circ$ ,  $AH = 2,8$  см,  $HD = 6,8$  см.

Найдите площадь трапеции.

Решение.

Проведем  $CP \perp AD$ .

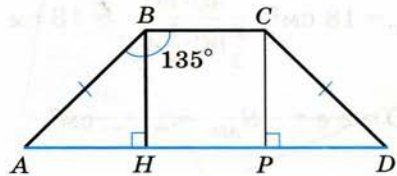
1) Так как трапеция  $ABCD$  — равнобедренная, то  $DP =$  \_\_\_\_\_ = \_\_\_\_\_ см, поэтому  $HP = HD -$  \_\_\_\_\_ =  $6,8$  см - \_\_\_\_\_ см = \_\_\_\_\_ см;  $AD = AH +$  \_\_\_\_\_ = \_\_\_\_\_ см + \_\_\_\_\_ см = \_\_\_\_\_ см.

2) Четырехугольник  $HBCP$  — прямоугольник, поэтому  $BC =$  \_\_\_\_\_ = \_\_\_\_\_ см.

3)  $\angle HBC = 90^\circ$ , а так как  $\angle ABC = 135^\circ$ , то  $\angle ABH = \angle ABC -$  \_\_\_\_\_ = \_\_\_\_\_ .  $\triangle ABH$  — прямоугольный ( $\angle H = 90^\circ$ ,  $\angle B = 45^\circ$ ) и \_\_\_\_\_, поэтому  $BH =$  \_\_\_\_\_ = \_\_\_\_\_ см.

4)  $S_{ABCD} =$  \_\_\_\_\_ = \_\_\_\_\_ см  $\cdot$  \_\_\_\_\_ см = \_\_\_\_\_ см<sup>2</sup>.

Ответ. \_\_\_\_\_ см<sup>2</sup>.



# § 3

## Теорема Пифагора

### 45

В прямоугольном треугольнике  $a$  и  $b$  — катеты.

Найдите: а)  $b$ , если  $a = 8$ ,  $c = 12$ ; б)  $c$ , если  $a = 4\sqrt{2}$ ,  $b = 7$ ;

в)  $a$ , если  $b = 3\sqrt{3}$ ,  $c = 5\sqrt{3}$ .

Решение. По теореме Пифагора  $c^2 = a^2 + b^2$ .

а)  $b^2 = c^2 - \underline{\quad}$ , откуда  $b = \sqrt{c^2 - \underline{\quad}} = \sqrt{144 - \underline{\quad}} = \sqrt{\underline{\quad}} = \underline{\quad}$

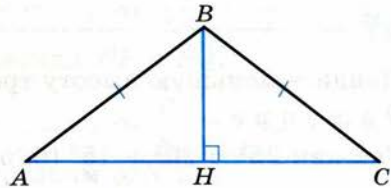
б)  $c^2 = \underline{\quad} + \underline{\quad}$ , откуда  $c = \sqrt{\underline{\quad} + \underline{\quad}} = \sqrt{\underline{\quad} + \underline{\quad}} = \sqrt{\underline{\quad}} = \underline{\quad}$

в)  $a^2 = c^2 - \underline{\quad}$ , откуда  $a = \sqrt{c^2 - \underline{\quad}} = \sqrt{\underline{\quad} - \underline{\quad}} = \underline{\quad}$

О т в е т. а)  $\underline{\quad}$ ; б)  $\underline{\quad}$ ; в)  $\underline{\quad}$

### 46

На рисунке в равнобедренном треугольнике  $ABC$  основание  $AC = 16$  см, высота  $BH = 6$  см. Найдите боковую сторону.



Решение.

1) Так как  $\triangle ABC$  — равнобедренный с основанием  $AC$ , то  $AB = BC$  и высота  $BH$  является  $\underline{\quad}$ , значит,  $AH = \frac{1}{2} \underline{\quad} = \underline{\quad}$  см.

2) Из прямоугольного треугольника  $ABH$  по теореме Пифагора находим:  $AB = \sqrt{\underline{\quad} + \underline{\quad}} = \sqrt{\underline{\quad} + \underline{\quad}}$  см =  $\underline{\quad}$  см.

О т в е т.  $\underline{\quad}$  см.

### 47

По гипотенузе  $c = 14$  и катету  $b = 7$  прямоугольного треугольника найдите высоту  $h$ , проведенную к гипотенузе.

Решение.

1) Пусть  $a$  — второй катет прямоугольного треугольника, тогда по теореме Пифагора  $a = \sqrt{\underline{\quad} - \underline{\quad}} = \sqrt{\underline{\quad} - \underline{\quad}} = \sqrt{\underline{\quad}} = \underline{\quad}$

2) Площадь  $S$  прямоугольного треугольника равна  $\frac{1}{2} a \underline{\quad}$ , а с другой стороны,  $S = \frac{1}{2} c \underline{\quad}$ , поэтому  $a \underline{\quad} = c \underline{\quad}$ , откуда  $h = \underline{\quad}$

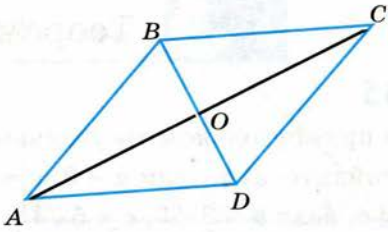
О т в е т.  $\underline{\quad}$



На рисунке диагонали ромба  $ABCD$  пересекаются в точке  $O$ ,  $AB = 13$  см,  $BD = 10$  см. Найдите  $AC$  и  $S_{ABCD}$ .

Решение.

1) Так как диагонали ромба взаимно перпендикулярны, то  $BD \perp AC$  и  $\triangle ABO$  —  $\triangle ABO$ , причем гипотенуза  $AB = 13$  см по условию, а катет  $BO = \frac{1}{2} BD = \frac{1}{2} \cdot 10$  см = 5 см. По теореме Пифагора находим:  $AO = \sqrt{AB^2 - BO^2} = \sqrt{13^2 - 5^2}$  см = 12 см,  $AC = 2 \cdot AO = 2 \cdot 12$  см = 24 см.



2) Площадь ромба можно вычислить по формуле  $S_{ABCD} = \frac{1}{2} AC \cdot BD$  (задача 476 учебника), откуда  $S_{ABCD} = \frac{1}{2} \cdot 24 \cdot 10 = 120$  см<sup>2</sup>.

Ответ. 120 см<sup>2</sup>.

## 49

Найдите меньшую высоту треугольника со сторонами 15, 20 и 25.

Решение.

Так как  $25^2 = 20^2 + 15^2$  ( $625 = 400 + 225$ ), то по теореме, обратной теореме Пифагора, данный треугольник — прямоугольный. Гипотенуза является наибольшей стороной этого треугольника, а высота  $h$ , проведенная к гипотенузе, делит ее на отрезки  $15$  и  $20$ .

Так как  $h \cdot 25 = 15 \cdot 20$ , то  $h = \frac{15 \cdot 20}{25} = 12$ .

Ответ. 12.

## 50

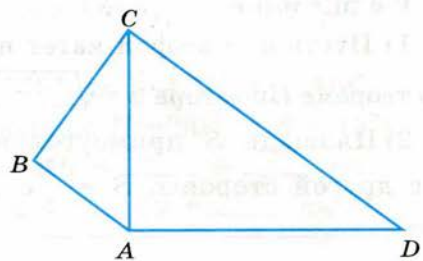
Найдите площадь четырехугольника  $ABCD$ , если  $AB = 9$  см,  $BC = 12$  см,  $CD = 25$  см,  $AD = 20$  см,  $AC = 15$  см.

Решение.

1) Так как  $15^2 = 12^2 + 9^2$  и  $25^2 = 20^2 + 15^2$ , то по теореме, обратной теореме Пифагора, треугольники  $ABC$  и  $DAC$  — прямоугольные.

2)  $S_{ABCD} = S_{ABC} + S_{DAC} = \frac{1}{2} \cdot 9 \cdot 12 + \frac{1}{2} \cdot 20 \cdot 15 = 135$  (см<sup>2</sup>).

Ответ. 135 см<sup>2</sup>.



## Подобные треугольники

## § 1

## Определение подобных треугольников

## 51

Даны отрезки:  $AB = 12$  см,  $CD = 8$  см,  $EF = 15$  см,  $KL = 30$  см,  $MN = 16$  см,  $PQ = 20$  см. Найдите среди них пары пропорциональных отрезков.

Решение.

1) Так как  $\frac{AB}{EF} = \frac{12}{15} = \frac{4}{5}$ ,  $\frac{MN}{PQ} = \frac{16}{20} = \frac{4}{5}$ , то  $\frac{AB}{EF} = \frac{MN}{PQ}$ , т. е. отрезки  $AB$  и  $MN$  пропорциональны отрезкам  $EF$  и  $PQ$ .

2) Так как  $\frac{CD}{MN} = \frac{8}{16} = \frac{1}{2}$ ,  $\frac{EF}{PQ} = \frac{15}{20} = \frac{3}{4}$ , то  $\frac{CD}{MN} \neq \frac{EF}{PQ}$ , т. е. отрезки  $CD$  и  $EF$  не пропорциональны отрезкам  $MN$  и  $PQ$ .

3) Так как  $\frac{AB}{CD} = \frac{12}{8} = \frac{3}{2}$ ,  $\frac{KL}{PQ} = \frac{30}{20} = \frac{3}{2}$ , то  $\frac{AB}{CD} = \frac{KL}{PQ}$ , т. е. отрезки  $AB$  и  $KL$  пропорциональны отрезкам  $CD$  и  $PQ$ .

О т в е т. \_\_\_\_\_

## 52

Подобны ли треугольники  $ABC$  и  $DEF$ , в которых  $\angle A = 98^\circ$ ,  $\angle B = 44^\circ$ ,  $\angle F = 38^\circ$ ,  $\angle D = 98^\circ$ ,  $AB = 12$ ,  $AC = 21$ ,  $BC = 30$ ,  $DF = 7$ ,  $EF = 10$ ,  $DE = 4$ ?

Решение.

1)  $\angle A = \angle D = 98^\circ$  по условию. В треугольнике  $ABC$  имеем:  $\angle C = 180^\circ - (\angle A + \angle B) = 180^\circ - (98^\circ + 44^\circ) = 38^\circ$ , поэтому  $\angle C = \angle F = 38^\circ$ . В треугольнике  $DEF$  имеем:  $\angle E = 180^\circ - (\angle D + \angle F) = 180^\circ - (98^\circ + 38^\circ) = 24^\circ$ , поэтому  $\angle E \neq \angle B = 44^\circ$ .

Итак, углы треугольников  $ABC$  и  $DEF$  соответственно равны.

2) Рассмотрим отношения сходственных сторон треугольников

$ABC$  и  $DEF$ :  $\frac{AB}{DE} = \frac{12}{4} = \frac{3}{1}$ ,  $\frac{AC}{DF} = \frac{21}{7} = \frac{3}{1}$ ,  $\frac{BC}{EF} = \frac{30}{10} = \frac{3}{1}$ , поэтому

$\frac{AB}{DE} = \frac{AC}{DF} = \frac{BC}{EF}$ , т. е. стороны треугольника  $ABC$  \_\_\_\_\_

---

Итак,  $\triangle ABC \sim \triangle DEF$  по \_\_\_\_\_

О т в е т .

Треугольники  $ABC$  и  $DEF$  \_\_\_\_\_

### 53

---

В подобных треугольниках  $ABC$  и  $EDF$  стороны  $AB$  и  $ED$ ,  $BC$  и  $DF$  являются сходственными. Найдите стороны  $AB$  и  $AC$  треугольника  $ABC$ , если  $ED = 3$  см,  $DF = 5$  см,  $EF = 7$  см,  $BC = 15$  см.

Р е ш е н и е .

В подобных треугольниках  $ABC$  и  $EDF$  стороны  $BC$  и  $DF$  являются сходственными по условию, поэтому коэффициент  $k$  подобия этих треугольников равен  $\frac{BC}{DF}$ , т. е.  $k = \underline{\quad} : \underline{\quad} = \underline{\quad}$

Следовательно,  $AB = k \cdot \underline{\quad} = \underline{\quad} \cdot \underline{\quad}$  см =  $\underline{\quad}$  см,  
 $AC = k \cdot \underline{\quad} = \underline{\quad} \cdot \underline{\quad}$  см =  $\underline{\quad}$  см.

О т в е т .

$AB = \underline{\quad}$  см,  $AC = \underline{\quad}$  см.

### 54

---

Площади двух подобных треугольников равны  $35$  дм<sup>2</sup> и  $315$  дм<sup>2</sup>. Одна из сторон первого треугольника равна  $14$  дм. Найдите сходственную ей сторону второго треугольника.

Р е ш е н и е .

Пусть  $k$  — коэффициент подобия треугольников, тогда по теореме об отношении площадей подобных треугольников получим:  $k^2 = \underline{\quad}$  дм<sup>2</sup> :  $\underline{\quad}$  дм<sup>2</sup> =  $\underline{\quad}$ , откуда  $k = \underline{\quad}$ . Искомая сторона  $a$  второго треугольника в  $\underline{\quad}$  раза больше сходственной ей стороны первого треугольника, т. е.  $a = \underline{\quad} \cdot 14$  дм =  $\underline{\quad}$  дм.

О т в е т .  $\underline{\quad}$  дм.



## 55

На рисунке  $DE \parallel AC$ . Докажите, что треугольники  $ABC$  и  $DBE$  подобны, и найдите коэффициент подобия  $k$ , если  $AB = 21$  см,  $AD = 7$  см.

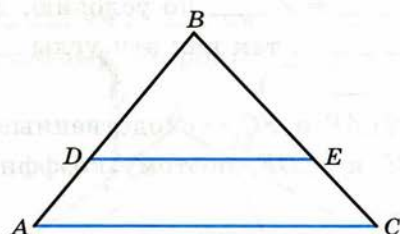
Решение.

1)  $\triangle ABC \sim \triangle DBE$  по двум углам ( $\angle$  — общий,  $\angle A =$  —, так как эти углы — при пересечении параллельных прямых — и секущей —).

2) Так как коэффициент  $k$  подобия треугольников  $ABC$  и  $DBE$  равен отношению сходственных сторон, то  $k = AB :$  —

$DB = AB -$  — = — см — см = — см, и поэтому  $k =$  — см : — см = —

Ответ. —



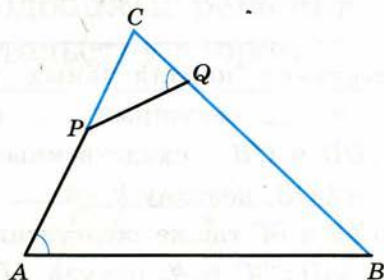
## 56

На рисунке  $\angle PQC = \angle A$ ,  $BC = 18$  см,  $CP = 6$  см,  $CQ = 4$  см. Найдите сторону  $AC$ .

Решение.

$\triangle CPQ \sim \triangle CBA$  по — (  $\angle$  — общий,  $\angle PQC = \angle$  — по условию). Стороны  $CP$  и  $CB$ ,  $CQ$  и — — сходственные стороны этих подобных треугольников, поэтому коэффициент  $k$  подобия равен  $CP :$  — = — см : — см = — и  $CQ : AC =$  —, откуда  $AC =$  —  $CQ =$  — см.

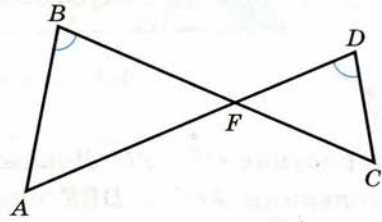
Ответ. — см.



На рисунке  $\angle B = \angle D$ ,  $\frac{AF}{CF} = \frac{3}{2}$ ,  
 $BF = 15$  см. Найдите  $DF$ .

Решение.

1)  $\triangle ABF \sim \triangle CDF$  по \_\_\_\_\_  
 ( $\angle \_\_\_ = \angle \_\_\_$  по условию,  $\angle AFB =$   
 $= \angle \_\_\_$ , так как эти углы \_\_\_\_\_  
 \_\_\_\_\_).



2)  $AF$  и  $FC$  — сходственные стороны подобных треугольников  $ABF$  и  $CDF$ , поэтому коэффициент  $k$  подобия равен \_\_\_\_\_ : \_\_\_\_\_ = \_\_\_\_\_

3) Так как  $BF$  и  $DF$  тоже являются сходственными сторонами, то  $BF : DF =$  \_\_\_\_\_, откуда  $DF =$  \_\_\_\_\_  $BF =$  \_\_\_\_\_ см = \_\_\_\_\_ см.

О т в е т .

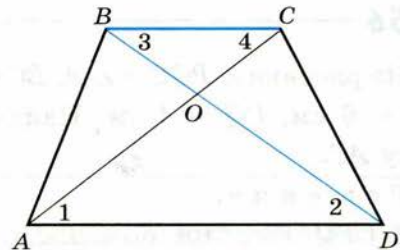
\_\_\_\_\_ см.

## 58

Диагонали трапеции  $ABCD$ , изображенной на рисунке, пересекаются в точке  $O$ ,  $BO = 3,2$  см,  $OD = 6,4$  см,  $BC = 4,8$  см. Найдите  $AD$ .

Доказательство.

1)  $\triangle AOD \sim \triangle COB$  по \_\_\_\_\_  
 \_\_\_\_\_ ( $\angle 1 = \angle \_\_\_$ ,  
 $\angle 2 = \angle \_\_\_$ , так как эти углы \_\_\_\_\_  
 \_\_\_\_\_ при  
 пересечении параллельных прямых  
 \_\_\_\_\_ и \_\_\_\_\_ секущими \_\_\_\_\_ и \_\_\_\_\_).



2)  $OD$  и  $OB$  — сходственные стороны подобных треугольников  $AOD$  и  $COB$ , поэтому  $k =$  \_\_\_\_\_ = \_\_\_\_\_ см : \_\_\_\_\_ см = \_\_\_\_\_

3)  $AD$  и  $BC$  также сходственные стороны этих треугольников, поэтому  $AD : BC = k$ , откуда  $AD =$  \_\_\_\_\_  $\cdot$  \_\_\_\_\_ = \_\_\_\_\_  $\cdot$  \_\_\_\_\_ см = \_\_\_\_\_ см.

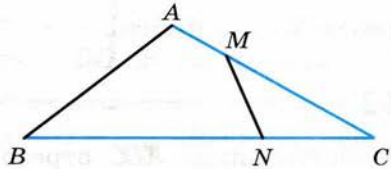
О т в е т .

\_\_\_\_\_ см.

На рисунке  $BC = 18$  см,  $CM = 9$  см,  $CN = 6$  см,  $AC = 12$  см. Докажите, что треугольники  $ABC$  и  $MNC$  подобны.

Доказательство.

$\angle C$  — \_\_\_\_\_ угол треугольников \_\_\_\_\_ и \_\_\_\_\_. Рассмотрим отношения сторон, заключающих этот угол:  $AC : CN =$  \_\_\_\_\_ см : \_\_\_\_\_ см = \_\_\_\_\_,  $BC : CM =$  \_\_\_\_\_ см : \_\_\_\_\_ см = \_\_\_\_\_. Эти отношения \_\_\_\_\_, поэтому стороны \_\_\_\_\_ и \_\_\_\_\_ треугольника  $ABC$  пропорциональны сторонам \_\_\_\_\_ и \_\_\_\_\_ треугольника  $MNC$ . Следовательно,  $\triangle ABC \sim \triangle$  \_\_\_\_\_ по \_\_\_\_\_ признаку подобия треугольников.



Докажите, что треугольники  $MNP$  и  $CDE$  подобны, если стороны  $MN = 7,5$  см,  $MP = 4,5$  см,  $PN = 6$  см,  $DE = 24$  см,  $EC = 18$  см,  $CD = 30$  см.

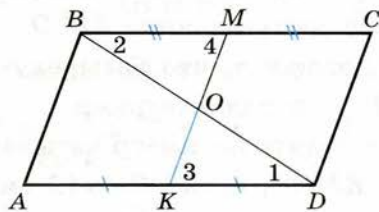
Доказательство.

Так как  $MN : CD =$  \_\_\_\_\_ см : \_\_\_\_\_ см = \_\_\_\_\_,  $MP : CE =$  \_\_\_\_\_ см : \_\_\_\_\_ см = \_\_\_\_\_ и  $NP : DE =$  \_\_\_\_\_ см : \_\_\_\_\_ см = \_\_\_\_\_, то стороны  $MN$ , \_\_\_\_\_ и \_\_\_\_\_ треугольника  $MNP$  \_\_\_\_\_ сторонам \_\_\_\_\_, \_\_\_\_\_ и \_\_\_\_\_ треугольника \_\_\_\_\_. Следовательно, по \_\_\_\_\_  $\triangle MNP \sim \triangle CDE$ .

### § 3

## Применение подобия к решению задач и доказательству теорем

Точки  $K$  и  $M$  — середины сторон  $AD$  и  $BC$  параллелограмма  $ABCD$ , изображенного на рисунке. Отрезки  $KM$  и  $BD$  пересекаются в точке  $O$ . Докажите, что  $KO$  — средняя линия треугольника  $ABD$ .





### Доказательство.

Докажем, что точка  $O$  — середина стороны \_\_\_\_\_ треугольника  $ABD$ . По условию задачи  $DK = \frac{1}{2}$  \_\_\_\_\_ и  $BM =$  \_\_\_\_\_. Четырехугольник  $ABCD$  — параллелограмм, следовательно,  $AD =$  \_\_\_\_\_, поэтому и  $KD =$  \_\_\_\_\_  $BM$ .

Так как  $AD \parallel$  \_\_\_\_\_, то  $\angle 1 = \angle$  \_\_\_\_\_ и  $\angle 3 = \angle$  \_\_\_\_\_. Следовательно,  $\triangle OKD = \triangle$  \_\_\_\_\_. Отсюда получаем:  $OD =$  \_\_\_\_\_.

Итак, точки  $K$  и  $O$  — \_\_\_\_\_ сторон  $AD$  и \_\_\_\_\_ треугольника  $ABD$ , поэтому  $KO$  — его \_\_\_\_\_ линия, что и требовалось доказать.

## 62

В треугольнике  $ABC$  отрезок  $OT$  — средняя линия,  $\angle A = \angle C$ .

а) Докажите, что треугольник  $COT$  равнобедренный.

б) Найдите периметр треугольника  $COT$ , если периметр треугольника  $ABC$  равен 18 см.

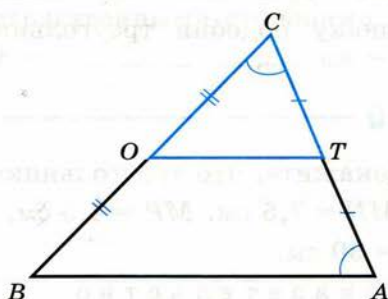
Решение.

а) Так как  $OT$  — \_\_\_\_\_ линия треугольника  $ABC$ , то  $OT \parallel$  \_\_\_\_\_, поэтому  $\angle CTO = \angle$  \_\_\_\_\_ =  $\angle C$ . Следовательно, треугольник  $COT$  — \_\_\_\_\_.

б) Так как  $OT$  — средняя \_\_\_\_\_ треугольника  $ABC$ , то  $OT = \frac{1}{2}$  \_\_\_\_\_,  $CO =$  \_\_\_\_\_  $BC$  и  $CT =$  \_\_\_\_\_. Следовательно,

$$P_{COT} = OT + CO + \text{_____} = \frac{1}{2} AB + \text{_____} + \text{_____} = \text{_____} (AB + \text{_____} + \text{_____}) = \text{_____} P_{ABC} = \text{_____} \text{ см.}$$

Ответ. \_\_\_\_\_

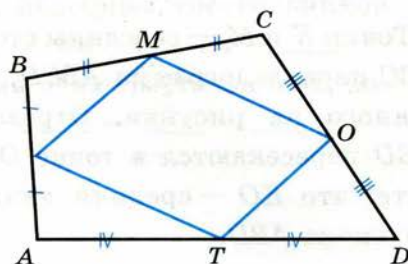


## 63

Точки  $K, M, O, T$  — середины сторон четырехугольника  $ABCD$ .

а) Докажите, что четырехугольник  $KMOT$  — параллелограмм.

б) Найдите периметр четырехугольника  $KMOT$ , если  $AC = 12$  см,  $BD = 16$  см.



Р е ш е н и е.

а) Проведем диагональ  $AC$  четырехугольника  $ABCD$ . В треугольнике  $ABC$  точки  $K$  и  $M$  — \_\_\_\_\_ сторон  $AB$  и \_\_\_\_\_, поэтому отрезок  $KM$  — его средняя \_\_\_\_\_, и следовательно,  $KM \parallel$  \_\_\_\_\_ и  $KM =$  \_\_\_\_\_  $AC$ .

Аналогично отрезок  $OT$  — \_\_\_\_\_ линия треугольника  $ADC$ , поэтому  $OT$  \_\_\_\_\_  $AC$  и  $OT =$  \_\_\_\_\_  $AC$ . Отсюда следует, что  $KM \parallel OT$  и  $KM$  \_\_\_\_\_  $OT$ , а значит, четырехугольник  $KMOT$  является \_\_\_\_\_

б) По доказанному  $KM =$  \_\_\_\_\_  $AC =$  \_\_\_\_\_  $\cdot 12 =$  \_\_\_\_\_ (см) и  $OT$  \_\_\_\_\_  $KM =$  \_\_\_\_\_ см. Проведем диагональ  $BD$ . В треугольниках  $ABD$  и  $BDC$  отрезки  $KT$  и  $MO$  — средние \_\_\_\_\_, следовательно,  $KT =$  \_\_\_\_\_  $BD =$  \_\_\_\_\_ см и  $MO =$  \_\_\_\_\_  $BD =$  \_\_\_\_\_ см. Итак,  $KT = MO =$  \_\_\_\_\_ см и  $KM = OT =$  \_\_\_\_\_ см, следовательно,  $P_{KMOT} = 2 \cdot$  \_\_\_\_\_  $+ 2 \cdot$  \_\_\_\_\_  $=$  \_\_\_\_\_ см.

О т в е т . \_\_\_\_\_

## 64

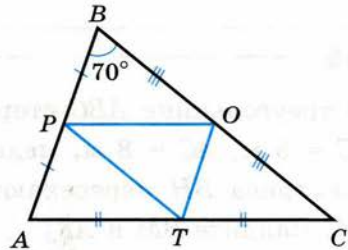
Площадь треугольника  $ABC$  равна  $20 \text{ см}^2$ ,  $\angle B = 70^\circ$ , точки  $P$ ,  $T$  и  $O$  — середины сторон. Найдите: а)  $\angle PTO$ ; б) площадь треугольника  $OTP$ .

Р е ш е н и е.

а) Так как точки  $P$ ,  $T$ ,  $O$  — \_\_\_\_\_ \_\_\_\_\_ сторон, то отрезки  $PT$ ,  $TO$  и  $PO$  — средние \_\_\_\_\_ треугольника  $ABC$ , следовательно,  $PT \parallel$  \_\_\_\_\_ и  $TO \parallel$  \_\_\_\_\_. Так как противоположные стороны четырехугольника  $BPTO$  попарно \_\_\_\_\_, то этот четырехугольник является \_\_\_\_\_, поэтому  $\angle PTO = \angle$  \_\_\_\_\_  $=$  \_\_\_\_\_

б) Так как отрезки  $PT$ ,  $TO$  и  $PO$  — средние \_\_\_\_\_ треугольника  $ABC$ , то  $PT =$  \_\_\_\_\_  $BC$ ,  $TO =$  \_\_\_\_\_  $AB$  и  $PO =$  \_\_\_\_\_  $AC$ , т. е.  $\frac{PT}{BC} = \frac{TO}{AC} = \frac{PO}{AB} = \frac{1}{2}$ , поэтому  $\triangle OTP$  \_\_\_\_\_  $\triangle ABC$  с коэффициентом подобия  $k =$  \_\_\_\_\_. Следовательно,  $S_{OTP} : S_{ABC} = 1 :$  \_\_\_\_\_, откуда получаем:  $S_{OTP} =$  \_\_\_\_\_  $S_{ABC} =$  \_\_\_\_\_  $\cdot 20 =$  \_\_\_\_\_ (см<sup>2</sup>).

О т в е т . а)  $\angle PTO =$  \_\_\_\_\_; б)  $S_{OTP} =$  \_\_\_\_\_ см<sup>2</sup>.



Точка  $P$  — середина стороны  $AB$  треугольника  $ABC$ ,  $PM \parallel AC$ . Докажите, что отрезок  $PM$  — средняя линия треугольника  $ABC$ .

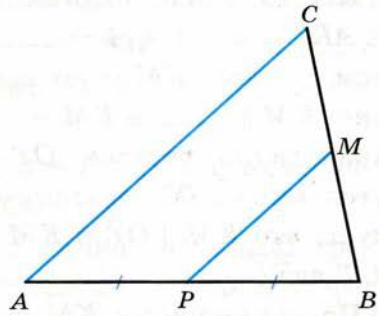
**Доказательство.**

Предположим, что отрезок  $PM$  не является средней \_\_\_\_\_ треугольника  $ABC$ , тогда точка  $M$  не будет серединой стороны \_\_\_\_\_.

Пусть точка  $O$  — середина \_\_\_\_\_  $BC$ , тогда отрезок  $PO$  есть \_\_\_\_\_ линия треугольника  $ABC$ , и поэтому  $PO \parallel AC$ .

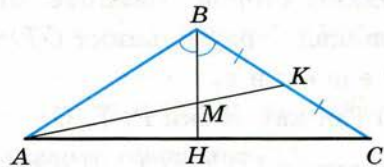
Итак, через точку  $P$  проходят \_\_\_\_\_ прямые (\_\_\_\_\_ и \_\_\_\_\_), параллельные прямой \_\_\_\_\_, что противоречит аксиоме \_\_\_\_\_ прямых.

Следовательно, исходное предположение неверно, т. е. отрезок  $PM$  является \_\_\_\_\_ линией треугольника  $ABC$ , что и требовалось \_\_\_\_\_.



## 66

В треугольнике  $ABC$  стороны  $AB = BC = 5$  м,  $AC = 8$  м, медиана  $AK$  и биссектриса  $BH$  пересекаются в точке  $M$ . Найдите  $BM$  и  $AK$ .



**Решение.**

Так как  $AB = BC$ , то треугольник  $ABC$  — \_\_\_\_\_, а потому биссектриса  $BH$  является также его высотой и \_\_\_\_\_, следовательно,  $BH \perp AC$  и  $AH = HC =$  \_\_\_\_\_ м.

Медианы треугольника пересекаются в \_\_\_\_\_ точке и делятся ею в отношении \_\_\_\_\_ : \_\_\_\_\_, считая от вершины, т. е.  $BM =$  \_\_\_\_\_  $MH$  и  $AM =$  \_\_\_\_\_  $MK$ . В прямоугольном треугольнике  $ABH$  имеем:  $BH^2 = AB^2 -$  \_\_\_\_\_ = \_\_\_\_\_ - \_\_\_\_\_ = \_\_\_\_\_ ( $\text{м}^2$ ), откуда  $BH =$  \_\_\_\_\_ м. Поэтому  $MH =$  \_\_\_\_\_  $BH =$  \_\_\_\_\_ м,  $BM =$  \_\_\_\_\_ м.

В треугольнике  $AMH$  имеем:  $AM^2 =$  \_\_\_\_\_ + \_\_\_\_\_ = \_\_\_\_\_ + \_\_\_\_\_ = \_\_\_\_\_ ( $\text{м}^2$ ), откуда  $AM =$  \_\_\_\_\_ м. Следовательно,  $AK = \frac{3}{2}$  \_\_\_\_\_ м.

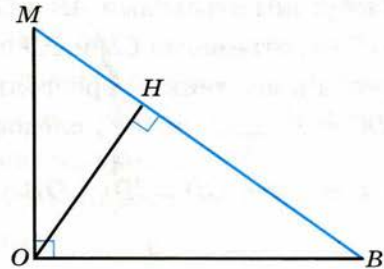
**Ответ.**  $BM =$  \_\_\_\_\_ м,  $AK =$  \_\_\_\_\_ м.



В треугольнике  $OBM$ , изображенном на рисунке,  $\angle BOM = 90^\circ$ ,  $OH \perp BM$ ,  $BM = 26$  дм,  $BH = 18$  дм. Найдите  $OH$  и  $OB$ .

Решение.

Так как  $OH$  — \_\_\_\_\_ прямоугольного треугольника  $OBM$ , проведенная из вершины \_\_\_\_\_ угла, то  $OB = \sqrt{BM \cdot \underline{\hspace{1cm}}} = \sqrt{\underline{\hspace{1cm}} \cdot \underline{\hspace{1cm}}} = \underline{\hspace{1cm}}$  (дм). Далее,  $MH = BM - \underline{\hspace{1cm}} = \underline{\hspace{1cm}}$  дм, поэтому  $OH = \sqrt{\underline{\hspace{1cm}} \cdot \underline{\hspace{1cm}}} = \sqrt{\underline{\hspace{1cm}} \cdot \underline{\hspace{1cm}}} = \underline{\hspace{1cm}}$  (дм).

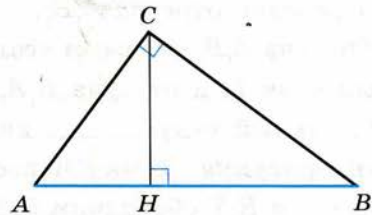


Ответ.  $OB = \underline{\hspace{1cm}}$  дм,  
 $OH = \underline{\hspace{1cm}}$  дм.

Гипотенуза  $AB$  прямоугольного треугольника  $ABC$  равна 30 м, а отношение катетов равно 3:4. Найдите отрезки, на которые гипотенуза делится высотой треугольника.

Решение.

Пусть  $AC = 3x$ , тогда  $BC = 4x$  и  $(3x)^2 + (\underline{\hspace{1cm}})^2 = 30^2$ . Отсюда  $\underline{\hspace{1cm}} x^2 = \underline{\hspace{1cm}}$ ,  $x^2 = \underline{\hspace{1cm}}$  и  $x = \underline{\hspace{1cm}}$ . Следовательно,  $AC = \underline{\hspace{1cm}}$  м и  $BC = \underline{\hspace{1cm}}$  м. Но  $AC = \sqrt{AB \cdot \underline{\hspace{1cm}}}$ , поэтому  $AC^2 = \underline{\hspace{1cm}} \cdot \underline{\hspace{1cm}}$ , или  $18^2 = 30 \cdot \underline{\hspace{1cm}}$ , откуда  $AH = \underline{\hspace{1cm}}$  м, а  $BH = 30 - \underline{\hspace{1cm}} = \underline{\hspace{1cm}}$  (м).



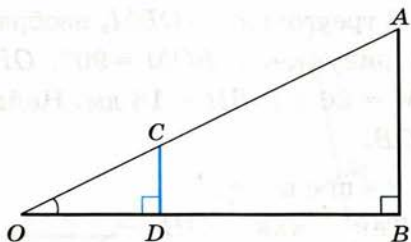
Ответ.  $AH = \underline{\hspace{1cm}}$  м,  
 $BH = \underline{\hspace{1cm}}$  м.

Длина тени столба равна 10 м, а длина тени человека, рост которого равен 1,8 м, равна 3,6 м. Найдите высоту столба.

Решение.

Изобразим отрезками  $AB$  и  $OB$  столб и его тень, отрезками  $CD$  и  $OD$  покажем человека и его тень. В треугольниках  $OCD$  и  $OAB$  угол  $O$  — общий,  $\angle ODC = \angle \text{---} = 90^\circ$ , следовательно,  $\triangle OCD \sim \triangle OAB$ . Отсюда получаем, что  $OD : CD = OB : \text{---}$ , а значит,  $AB = \frac{OB \cdot \text{---}}{OD} = \text{---} \cdot \text{---} = \text{---}$  (м).

О т в е т. Высота \_\_\_\_\_ равна \_\_\_\_\_ м.



## 70

Постройте треугольник по двум углам и медиане, проведенной из вершины третьего угла.

Решение.

Пусть даны углы 1 и 2 и отрезок  $PQ$ . Требуется построить треугольник  $ABC$ , у которого  $\angle A = \angle 1$ ,  $\angle B = \angle 2$ , а медиана  $CM$  равна \_\_\_\_\_  $PQ$ .

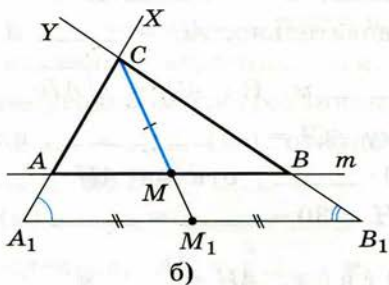
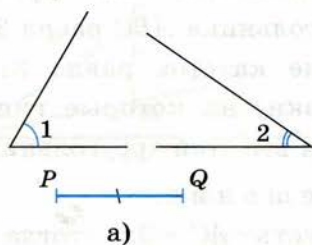
Построим сначала треугольник, подобный искомому. Для этого:

1) Проведем отрезок  $A_1B_1$ .

2) От луча  $A_1B_1$  отложим угол  $B_1A_1X$ , равный углу 1, и от луча  $B_1A_1$  — угол  $A_1B_1Y$ , равный углу \_\_\_\_\_, как показано на рисунке. Точку пересечения лучей  $A_1X$  и  $B_1Y$  обозначим буквой  $C$ .

3) Проведем медиану  $CM_1$  полученного треугольника \_\_\_\_\_

4) На луче  $CM_1$  от точки \_\_\_\_\_ отложим отрезок  $CM$ , равный данному отрезку \_\_\_\_\_



5) Через точку  $M$  проведем прямую  $m$ , параллельную прямой  $A_1B_1$ . Точки пересечения прямой  $m$  и лучей  $CA_1$  и \_\_\_\_\_ обозначим буквами  $A$  и  $B$ .

Треугольник  $ABC$  — искомый. Действительно, так как  $AB$  \_\_\_\_\_  $A_1B_1$ , то  $\angle BAC = \angle$  \_\_\_\_\_,  $\angle AMC = \angle$  \_\_\_\_\_, следовательно,  $\triangle AMC \sim \triangle A_1M_1C$ , а потому  $AM : A_1M_1 = CM :$ \_\_\_\_\_. Аналогично  $\triangle BMC \sim \triangle B_1M_1C$ , а потому  $BM :$ \_\_\_\_\_ =  $CM : CM_1$ . Следовательно,  $AM : A_1M_1 = BM :$ \_\_\_\_\_, но  $A_1M_1 =$ \_\_\_\_\_, поэтому  $AM$  \_\_\_\_\_  $BM$ , т. е. отрезок  $CM$  — медиана треугольника \_\_\_\_\_ и она равна данному отрезку \_\_\_\_\_. Как было доказано,  $\angle BAC =$ \_\_\_\_\_ =  $\angle$  \_\_\_\_\_, но  $\angle$  \_\_\_\_\_ =  $\angle 1$ , следовательно,  $\angle BAC$  \_\_\_\_\_  $\angle 1$ . Аналогично  $\angle ABC$  \_\_\_\_\_  $\angle 2$ . Поэтому треугольник  $ABC$  удовлетворяет всем требованиям задачи.

## § 4 Соотношения между сторонами и углами прямоугольного треугольника

71

Найдите синус, косинус и тангенс угла  $M$  треугольника  $MPT$ , если  $\angle P = 90^\circ$ ,  $MP = 8$ ,  $PT = 15$ .

Решение.

Синусом острого \_\_\_\_\_ прямоугольного треугольника называется отношение \_\_\_\_\_ катета к \_\_\_\_\_ . Против угла  $M$  лежит катет \_\_\_\_\_ .

По теореме \_\_\_\_\_ найдем гипотенузу:  $MT^2 =$ \_\_\_\_\_ =  $8^2 +$ \_\_\_\_\_ = \_\_\_\_\_, откуда  $MT =$ \_\_\_\_\_ . Следовательно,

$$\sin M = \frac{PT}{MT} = \frac{15}{_____} .$$

Косинусом острого угла \_\_\_\_\_ треугольника называется отношение \_\_\_\_\_ к \_\_\_\_\_ . К углу  $M$  прилежит

катет \_\_\_\_\_, следовательно,  $\cos M = \frac{MP}{MT} = \frac{8}{_____} .$

Тангенсом \_\_\_\_\_ угла прямоугольного треугольника называется \_\_\_\_\_ противолежащего катета к \_\_\_\_\_, т. е.  $\operatorname{tg} M = \frac{_____}{_____} = \frac{_____}{_____} .$

О т в е т . \_\_\_\_\_



Докажите, что в треугольнике  $BCH$  с прямым углом  $H$  выполняются следующие равенства:

а)  $\sin B = \cos C$ ;

б)  $\operatorname{tg} B = \frac{\sin B}{\cos B}$ ;

в)  $\sin^2 C + \cos^2 C = 1$ .

Доказательство.

а)  $\sin B = \frac{CH}{BC}$ ,  $\cos C = \frac{CH}{BC}$ , следовательно,  $\sin B = \cos C$ .

б)  $\sin B = \frac{CH}{BC}$ ,  $\cos B = \frac{BH}{BC}$ ,  $\operatorname{tg} B = \frac{CH}{BH}$ , поэтому  $\frac{\sin B}{\cos B} = \frac{CH \cdot \frac{1}{BH}}{1} = \operatorname{tg} B$ .

в)  $\sin C = \frac{BH}{BC}$ ,  $\cos C = \frac{CH}{BC}$ ,  $\sin^2 C + \cos^2 C = \left(\frac{BH}{BC}\right)^2 + \left(\frac{CH}{BC}\right)^2 =$   
 $= \frac{BH^2 + CH^2}{BC^2} = \frac{BC^2}{BC^2} = 1$ .

Гипотенуза  $AC$  прямоугольного треугольника  $ACE$  равна 50,  $\sin A = \frac{7}{25}$ . Найдите площадь треугольника.

Решение.

Синусом острого \_\_\_\_\_ прямоугольного треугольника называется отношение \_\_\_\_\_ к \_\_\_\_\_. Против угла  $A$  лежит катет \_\_\_\_\_, следовательно,  $\sin A = \frac{CE}{AC}$ , откуда  $CE = AC \cdot \frac{7}{25} = 50 \cdot \frac{7}{25} = 14$ .

Второй катет \_\_\_\_\_ найдем, используя теорему \_\_\_\_\_:  
 $AE = \sqrt{AC^2 - CE^2} = \sqrt{50^2 - 14^2} = 48$ .

Площадь прямоугольного треугольника равна \_\_\_\_\_ произведения катетов, поэтому  $S_{ACE} = \frac{1}{2} \cdot AE \cdot CE = \frac{1}{2} \cdot 48 \cdot 14 = 336$ .

Ответ.

\_\_\_\_\_

В треугольнике  $ABC$  даны  $\angle A = 90^\circ$ ,  $\angle B = 60^\circ$ ,  $AC = 9$ . Найдите сторону  $AB$ .

Решение.

По условию задачи  $\angle A = \underline{\hspace{2cm}}$ , следовательно, отрезок  $AC$  — катет, противолежащий углу  $\underline{\hspace{2cm}}$ , и требуется найти катет, прилежащий к углу  $\underline{\hspace{2cm}}$

Отношение катета, противолежащего углу  $B$ , и катета, прилежащего к этому углу, есть  $\underline{\hspace{2cm}}$  угла  $B$ , следовательно,

но,  $\frac{AC}{AB} = \underline{\hspace{2cm}}$ . Отсюда  $AB = AC : \underline{\hspace{2cm}} = \underline{\hspace{2cm}} : \text{tg } 60^\circ =$   
 $= \underline{\hspace{2cm}}$

Ответ.

$\underline{\hspace{2cm}}$

В прямоугольном треугольнике гипотенуза равна  $c$ , а один из острых углов равен  $\alpha$ . Выразите катеты через  $c$  и  $\alpha$  и найдите их длины, если:

а)  $c = 12$  дм,  $\alpha = 30^\circ$ ;

б)  $c = 16$  дм,  $\alpha = 45^\circ$ .

Решение.

Обозначим длину катета, противолежащего углу  $\alpha$ , буквой  $a$  и длину  $\underline{\hspace{2cm}}$ , прилежащего к углу  $\alpha$ , буквой  $b$ .

Тогда  $\sin \alpha = \frac{\underline{\hspace{2cm}}}{c}$ ,  $\cos \alpha = \frac{\underline{\hspace{2cm}}}{c}$ . Отсюда получаем:  $a = c \cdot \underline{\hspace{2cm}}$ ,

$b = \underline{\hspace{2cm}}$ . Подставляя числовые данные, получим:

а)  $a = \underline{\hspace{2cm}} \cdot \sin 30^\circ = \underline{\hspace{2cm}} \cdot \underline{\hspace{2cm}} = \underline{\hspace{2cm}}$  (дм);

$b = \underline{\hspace{2cm}}$  (дм).

б)  $a = \underline{\hspace{2cm}}$  (дм);

$b = \underline{\hspace{2cm}}$  (дм).

Ответ.

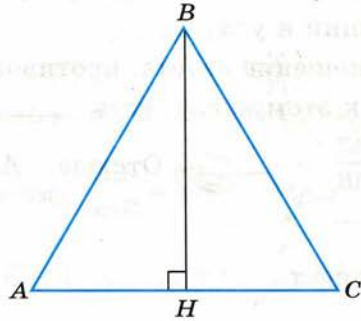
а)  $\underline{\hspace{2cm}}$

б)  $\underline{\hspace{2cm}}$

Найдите площадь равностороннего треугольника со стороной  $a$ .

Решение.

$S_{ABC} = \frac{1}{2} AC \cdot \underline{\hspace{2cm}}$ , где отрезок  $BH$  —  
 \_\_\_\_\_ треугольника. В  
 прямоугольном треугольнике  $ABH$   
 гипотенуза  $AB$  равна \_\_\_\_\_,  $\angle A =$   
 $=$  \_\_\_\_\_,  $BH$  — \_\_\_\_\_,  
 противолежащий углу  $A$ . Следовательно  
 но,  $\sin A = \frac{BH}{\underline{\hspace{1cm}}}$ , откуда  $BH = \underline{\hspace{1cm}} \times$   
 $\times \sin A = \underline{\hspace{1cm}} \cdot \sin 60^\circ = \underline{\hspace{1cm}} \cdot \underline{\hspace{1cm}} =$   
 $= \underline{\hspace{1cm}}$



Итак,  $S_{ABC} = \frac{1}{2} a \cdot \underline{\hspace{2cm}} = \underline{\hspace{2cm}} a^2$ .

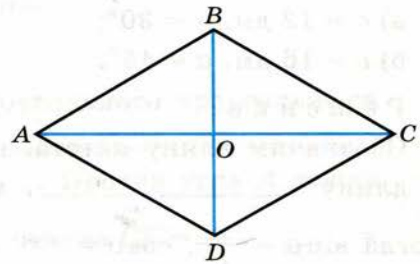
Ответ.

\_\_\_\_\_

Найдите углы ромба  $ABCD$ , если его диагонали  $AC$  и  $BD$  равны  $4\sqrt{3}$  м и 4 м.

Решение.

Пусть  $\angle BAO = \alpha$ . Диагонали ромба делят его углы \_\_\_\_\_, значит,  $\angle DAO = \angle \underline{\hspace{1cm}} = \alpha$ .



Диагонали ромба взаимно \_\_\_\_\_ и точкой пересечения делятся \_\_\_\_\_, следовательно, в прямоугольном треугольнике  $ABO$  катет  $AO$  равен \_\_\_\_\_ м, а катет \_\_\_\_\_ равен \_\_\_\_\_ м. Поэтому  $\operatorname{tg} \alpha = \underline{\hspace{1cm}} = \underline{\hspace{1cm}}$ , откуда  $\alpha = \underline{\hspace{1cm}}$ , а  $\angle BAD = 2 \cdot \underline{\hspace{1cm}} = \underline{\hspace{1cm}}$ ,  $\angle ADC = \angle \underline{\hspace{1cm}} = \underline{\hspace{1cm}}$

Ответ.

\_\_\_\_\_



## § 1

## Касательная к окружности

78

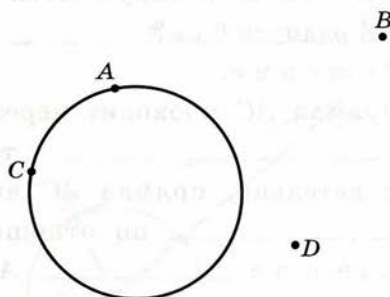
Проведите прямые через каждые две точки. Сколько общих точек имеет каждая из прямых с окружностью?

О т в е т.

Прямая \_\_\_\_\_ и окружность не имеют общих точек.

Прямая \_\_\_\_\_ и окружность имеют только одну \_\_\_\_\_ точку.

Прямые \_\_\_\_\_, \_\_\_\_\_, \_\_\_\_\_, \_\_\_\_\_ и окружность имеют две общие точки.



79

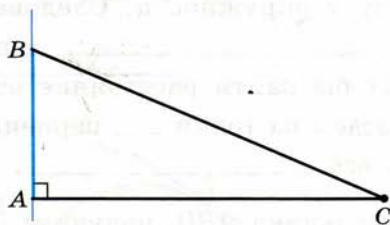
В треугольнике  $ABC$ , изображенном на рисунке,  $\angle A = 90^\circ$ ,  $AB = 5$  см,  $BC = 13$  см. Найдите радиус окружности с центром  $S$ , если она имеет с прямой  $AB$  только одну общую точку.

Р е ш е н и е.

По условию задачи окружность и прямая \_\_\_\_\_ имеют только \_\_\_\_\_ общую точку.

Если бы радиус окружности был меньше расстояния от \_\_\_\_\_ окружности — точки \_\_\_\_\_ — до прямой  $AB$ , то окружность и прямая имели бы \_\_\_\_\_ общие точки.

Если бы радиус \_\_\_\_\_ был больше расстояния от точки \_\_\_\_\_ до \_\_\_\_\_  $AB$ , то окружность и прямая \_\_\_\_\_ общих точек.



Следовательно, радиус  $R$  окружности \_\_\_\_\_ расстоянию от точки  $C$  до \_\_\_\_\_  $AB$ , т. е. равен катету \_\_\_\_\_

Итак,  $R = AC = \sqrt{\text{_____} - \text{_____}} = \sqrt{\text{_____}} = \text{_____}$  (см).

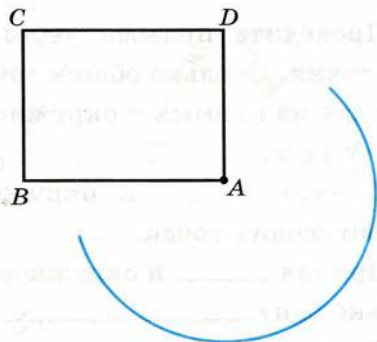
О т в е т. Радиус окружности равен \_\_\_\_\_ см.

### 80

Дан прямоугольник  $ABCD$ , где  $AB = 8$  см,  $AD = 6$  см. Какие из прямых  $AC$ ,  $BC$ ,  $CD$  и  $BD$  являются секущими по отношению к окружности с центром  $A$  радиуса 6 см?

Р е ш е н и е.

Прямая  $AC$  проходит через центр \_\_\_\_\_ — точку  $A$ , следовательно, прямая  $AC$  является \_\_\_\_\_ по отношению к окружности с \_\_\_\_\_  $A$ .



Так как  $\angle B = 90^\circ$ , то  $AB \perp BC$ , поэтому расстояние от точки  $A$  до \_\_\_\_\_  $BC$  равно \_\_\_\_\_ см, т. е. больше \_\_\_\_\_ окружности. Следовательно, прямая  $BC$  \_\_\_\_\_ секущей по отношению к данной окружности.

Так как  $\angle D = 90^\circ$ , то  $AD \perp CD$ , поэтому расстояние от \_\_\_\_\_  $A$  до \_\_\_\_\_  $CD$  равно \_\_\_\_\_ см, т. е. \_\_\_\_\_ радиусу окружности. Следовательно, прямая  $CD$  \_\_\_\_\_ по отношению к данной окружности.

Чтобы найти расстояние от точки  $A$  до \_\_\_\_\_  $BD$ , проведем из точки \_\_\_\_\_ перпендикуляр  $AH$  к прямой  $BD$  и вычислим его \_\_\_\_\_. Находя двумя способами площадь треугольника  $ABD$ , получим:  $\frac{1}{2} AB \cdot AD = \frac{1}{2} BD \cdot \text{_____}$ . По теореме

Пифагора  $BD = \sqrt{\text{_____} + \text{_____}} = \text{_____}$  см. Поэтому  $AH = \text{_____}$  см.

Итак, расстояние от точки  $A$  до прямой  $BD$  \_\_\_\_\_ радиуса окружности, следовательно, прямая  $BD$  \_\_\_\_\_ секущей по отношению к данной \_\_\_\_\_

О т в е т. Секущими являются прямые \_\_\_\_\_ и \_\_\_\_\_

Какая из прямых  $AC$ ,  $BC$ ,  $CD$  и  $BD$  из предыдущей задачи является касательной к окружности с центром  $A$  радиуса 6 см?

Решение.

Касательной к \_\_\_\_\_ называется \_\_\_\_\_, имеющая с окружностью только \_\_\_\_\_ точку. Прямая и окружность имеют только одну \_\_\_\_\_ точку, если расстояние от центра \_\_\_\_\_ до прямой равно \_\_\_\_\_ окружности. Это условие выполняется для прямой \_\_\_\_\_, значит, касательной к данной \_\_\_\_\_ является прямая \_\_\_\_\_

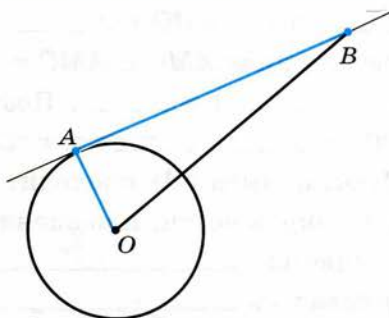
О т в е т. Касательной является прямая \_\_\_\_\_

Прямая  $AB$  — касательная в точке  $A$  к окружности с центром  $O$ . Найдите длину отрезка  $OB$ , если  $AB = 24$  дм, а радиус окружности равен 7 дм.

Решение.

По условию задачи прямая  $AB$  является \_\_\_\_\_ к данной окружности, следовательно, прямая  $AB$  \_\_\_\_\_ к радиусу  $OA$ , проведенному в \_\_\_\_\_ касания. Поэтому треугольник  $AOB$  — \_\_\_\_\_. По теореме Пифагора  $OB^2 = OA^2 +$  \_\_\_\_\_, откуда  $OB =$  \_\_\_\_\_ дм.

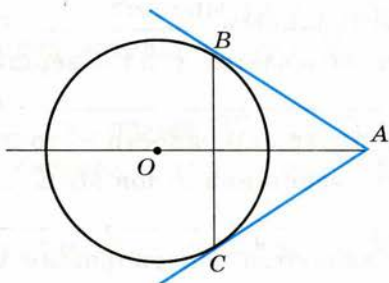
О т в е т.  $OB =$  \_\_\_\_\_ дм.



Прямые  $AB$  и  $AC$  касаются окружности с центром  $O$  в точках  $B$  и  $C$ . Найдите угол  $BAO$ , если  $AB = BC$ .

Решение.

Так как отрезки касательных к \_\_\_\_\_ окружности, проведенные из одной точки, \_\_\_\_\_, то  $AB =$  \_\_\_\_\_, следовательно, треугольник  $ABC$  — \_\_\_\_\_, поэтому  $\angle BAC =$  \_\_\_\_\_





Отрезки касательных к окружности, проведенные из одной \_\_\_\_\_, составляют \_\_\_\_\_ углы с прямой, проходящей через эту точку и \_\_\_\_\_ окружности, следовательно,  $\angle BAO = \angle \_\_\_\_\_\_ = \frac{1}{2} \angle \_\_\_\_\_\_ = \_\_\_\_\_\_$

О т в е т.  $\angle BAO = \_\_\_\_\_\_$

## 84

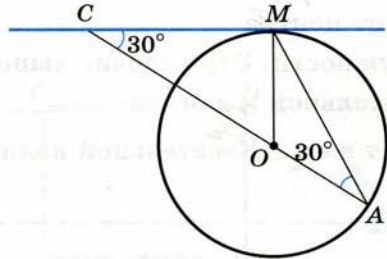
Прямая  $AC$  проходит через центр  $O$  окружности,  $\angle MAO = \angle OCM = 30^\circ$ . Докажите, что прямая  $CM$  является касательной к данной окружности.

Доказательство.

Так как в треугольнике  $AOM$   $AO = \_\_\_\_\_\_ = \_\_\_\_\_\_$ , то  $\angle AMO = \angle \_\_\_\_\_\_ = \_\_\_\_\_\_$ .

В треугольнике  $AMC$   $\angle AMC = 180^\circ - (\angle MAC + \angle \_\_\_\_\_\_) = 180^\circ - - (\_\_\_\_\_\_ + \_\_\_\_\_\_) = \_\_\_\_\_\_$ . Поэтому  $\angle OMC = \angle AMC - \angle \_\_\_\_\_\_ = = 120^\circ - \_\_\_\_\_\_ = \_\_\_\_\_\_ , т. е. CM \perp OM$ .

Итак, прямая  $CM$  проходит через конец радиуса \_\_\_\_\_, лежащий на окружности, и перпендикулярна к этому радиусу. Поэтому она является \_\_\_\_\_ к данной окружности, что и требовалось \_\_\_\_\_



## § 2

### Центральные и вписанные углы

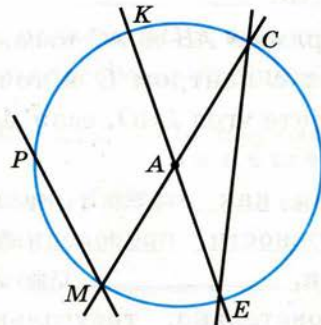
## 85

Какие углы являются центральными углами окружности с центром  $A$ ?

Решение.

Центральным \_\_\_\_\_ окружности называется угол с вершиной в \_\_\_\_\_ . На рисунке центр окружности — точка \_\_\_\_\_ служит вершиной углов  $MAE$ , \_\_\_\_\_, \_\_\_\_\_, \_\_\_\_\_, \_\_\_\_\_ . Эти углы являются центральными углами данной \_\_\_\_\_

О т в е т. \_\_\_\_\_

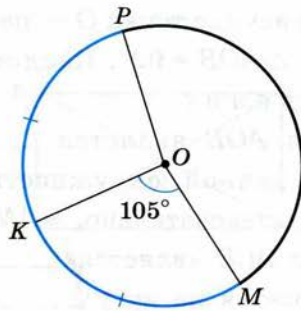


Точка  $O$  — центр окружности,  $\angle MOK = 105^\circ$ ,  $\sphericalangle PK = \sphericalangle MK$ . Найдите градусную меру угла  $MOP$ .

Решение.

Угол  $MOK$  является \_\_\_\_\_  
 \_\_\_\_\_ углом окружности, а дуга  $MK$   
 меньше полуокружности, поэтому  
 $\sphericalangle MK = \angle$  \_\_\_\_\_ = \_\_\_\_\_. По условию  
 задачи  $\sphericalangle PK = \sphericalangle$  \_\_\_\_\_, и, значит, гра-  
 дусная мера дуги  $PK$  равна \_\_\_\_\_.  $\sphericalangle MKP = \sphericalangle MK +$  \_\_\_\_\_ =  
 = \_\_\_\_\_  $> 180^\circ$ , т. е. дуга  $MKP$  больше полуокружности, поэтому  
 $\sphericalangle MKP =$  \_\_\_\_\_  $- \angle MOP$ , поэтому  $\angle MOP =$  \_\_\_\_\_  $- \sphericalangle MKP =$   
 = \_\_\_\_\_  $-$  \_\_\_\_\_ = \_\_\_\_\_

О т в е т.  $\angle MOP =$  \_\_\_\_\_



Какие из углов  $HAM$ ,  $HBM$ ,  $TCE$  и  $HPM$  являются вписанными?

Решение.

Вписанным углом называется угол, вершина которого лежит на \_\_\_\_\_, а стороны \_\_\_\_\_ окружность.

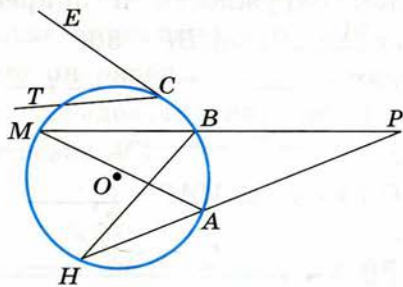
Точка  $A$  лежит на окружности, а стороны угла  $HAM$  \_\_\_\_\_ окружность. Следовательно, угол \_\_\_\_\_ вписанным.

Точка  $B$  лежит на \_\_\_\_\_, а стороны угла  $HBM$  пересекают \_\_\_\_\_, следовательно, угол  $HBM$  \_\_\_\_\_

Точка  $C$  \_\_\_\_\_, а сторона  $CE$  угла  $TCE$  не пересекает \_\_\_\_\_, следовательно, угол  $TCE$  \_\_\_\_\_ вписанным.

Точка  $P$  \_\_\_\_\_ на окружности, следовательно, угол  $HPM$  \_\_\_\_\_ вписанным.

О т в е т. Вписанными являются углы \_\_\_\_\_ и \_\_\_\_\_



На рисунке точка  $O$  — центр окружности,  $\angle AOB = 92^\circ$ . Найдите  $\angle ACB$ .

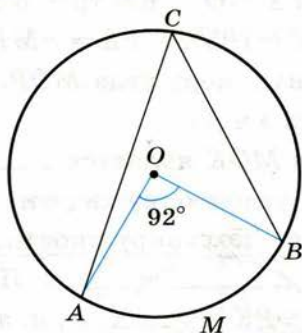
Решение.

Угол  $AOB$  является \_\_\_\_\_ углом данной окружности и равен \_\_\_\_\_, следовательно,  $\sphericalangle AMB =$  \_\_\_\_\_

Угол  $ACB$  является \_\_\_\_\_ и опирается на дугу \_\_\_\_\_, поэтому

$$\angle ACB = \frac{1}{2} \text{ _____} = \text{ _____}$$

Ответ.  $\angle ACB =$  \_\_\_\_\_



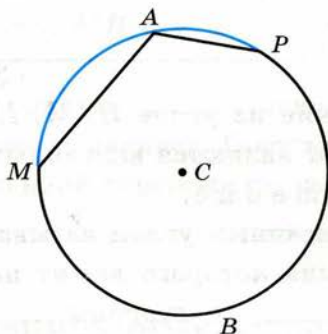
На рисунке  $\sphericalangle MAP = 120^\circ$ . Найдите  $\angle MAP$ .

Решение.

Угол  $MAP$  является \_\_\_\_\_ углом окружности и опирается на дугу \_\_\_\_\_.  $\sphericalangle MBP = 360^\circ - \sphericalangle$  \_\_\_\_\_ =  $360^\circ -$  \_\_\_\_\_ = \_\_\_\_\_,  $\angle MAP =$

$$= \frac{1}{2} \text{ _____} = \text{ _____}$$

Ответ.  $\angle MAP =$  \_\_\_\_\_



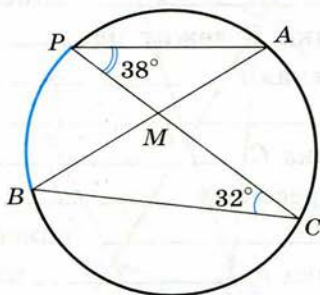
На рисунке  $\angle APM = 38^\circ$ ,  $\angle BCM = 32^\circ$ . Найдите  $\angle AMP$ .

Решение.

Вписанные углы  $PAB$  и  $BCP$  \_\_\_\_\_ на одну и ту же \_\_\_\_\_  $BP$ , следовательно,  $\angle PAB = \angle$  \_\_\_\_\_ = \_\_\_\_\_

Из треугольника  $AMP$  получим:  $\angle AMP = 180^\circ - (\angle$  \_\_\_\_\_ +  $\angle$  \_\_\_\_\_) =  $180^\circ -$  (\_\_\_\_\_ + \_\_\_\_\_) = \_\_\_\_\_

Ответ.  $\angle AMP =$  \_\_\_\_\_



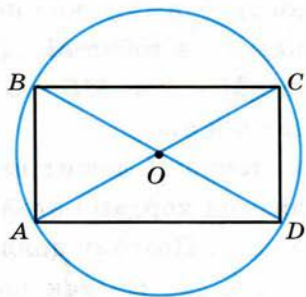


Дана окружность с диаметрами  $AC$  и  $BD$ . Докажите, что четырехугольник  $ABCD$  — прямоугольник.

**Доказательство.**

Отрезок  $AC$  — \_\_\_\_\_  
окружности, следовательно, дуга  $ADC$  — полуокружность. Вписанный угол  $ABC$  опирается на \_\_\_\_\_  
\_\_\_\_\_, поэтому он \_\_\_\_\_

Аналогично углы  $ADC$ , \_\_\_\_\_ и \_\_\_\_\_ прямые. Следовательно, четырехугольник  $ABCD$  является \_\_\_\_\_



## 92

Точки  $A, B, C$  лежат на одной окружности,  $\angle ABC = 80^\circ$ . Лежит ли центр окружности на отрезке  $AC$ ?

**Решение.**

Если центр окружности лежит на отрезке  $AC$ , то отрезок  $AC$  является \_\_\_\_\_ этой окружности, а дуга  $AC$  является \_\_\_\_\_ . Тогда вписанный угол  $ABC$  опирается на полуокружность, а потому он равен \_\_\_\_\_ , но по условию задачи  $\angle ABC =$  \_\_\_\_\_. Следовательно, центр окружности \_\_\_\_\_ на отрезке  $AC$ .

**Ответ.** \_\_\_\_\_

## 93

Хорды  $KM$  и  $PT$  пересекаются в точке  $C$ ,  $KC = 7$  см,  $CM = 4$  см,  $PT = 16$  см. Найдите отрезки  $PC$  и  $CT$ .

**Решение.**

Хорды  $KM$  и  $PT$  пересекаются, следовательно, произведение \_\_\_\_\_ хорды  $KM$  равно \_\_\_\_\_ отрезков хорды \_\_\_\_\_, т. е.  $PC \cdot$  \_\_\_\_\_ =  $KC \cdot$  \_\_\_\_\_. Обозначим длину отрезка  $PC$  буквой  $x$ , тогда  $CT =$  \_\_\_\_\_, следовательно,  $x \cdot$  (\_\_\_\_\_) =  $7 \cdot$  \_\_\_\_\_. Корни полученного квадратного уравнения  $x^2 -$  \_\_\_\_\_  $x +$  \_\_\_\_\_ =  $0$  равны \_\_\_\_\_ и \_\_\_\_\_. Итак, либо  $PC =$  \_\_\_\_\_, и тогда  $CT =$  \_\_\_\_\_, либо  $PC =$  \_\_\_\_\_, и тогда  $CT =$  \_\_\_\_\_

**Ответ.**  $PC =$  \_\_\_\_\_ см,  $CT =$  \_\_\_\_\_ см или  $PC =$  \_\_\_\_\_ см,  $CT =$  \_\_\_\_\_ см.

Точки  $A$ ,  $B$  и  $C$  лежат на одной окружности. Отрезки  $AB$  и  $CH$  пересекаются в точке  $M$ . Лежит ли точка  $H$  на данной окружности, если  $AM = 5$  м,  $MB = 6$  м,  $CM = 8$  м,  $MH = 4$  м?

Решение.

Если точка  $H$  лежит на данной окружности, то отрезки  $AB$  и  $CH$  являются хордами этой \_\_\_\_\_, пересекающимися в точке \_\_\_\_\_. Поэтому должно быть верным равенство  $AM \cdot \underline{\hspace{1cm}} = \underline{\hspace{1cm}} \cdot MH$ . Но так как  $5 \cdot 6 \neq 8 \cdot 4$ , то точка  $H$  \_\_\_\_\_ на данной окружности.

Ответ. \_\_\_\_\_

### § 3

## Четыре замечательные точки треугольника

### 95

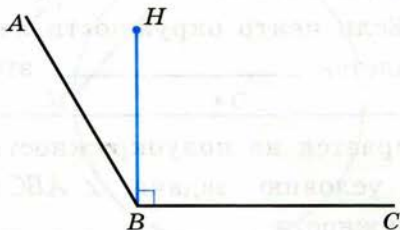
На рисунке  $\angle ABC = 120^\circ$ ,  $NB \perp BC$ ,  $BN = 4$  см. Вычислите расстояние от точки  $N$  до стороны  $BA$  угла  $ABC$ .

Решение.

Проведем из точки \_\_\_\_\_ перпендикуляр  $NM$  к прямой  $BA$ , тогда расстояние от точки  $N$  до прямой \_\_\_\_\_ равно длине отрезка \_\_\_\_\_. По условию задачи  $\angle ABC = \underline{\hspace{1cm}}$ ,  $NB \perp BC$ , т. е.  $\angle \underline{\hspace{1cm}} = 90^\circ$ . Значит,  $\angle ABN = 120^\circ - \underline{\hspace{1cm}} = \underline{\hspace{1cm}}$

В треугольнике  $BNM$   $\angle MBN = \underline{\hspace{1cm}}$ ,  $\angle NMB = \underline{\hspace{1cm}}$ , следовательно,  $NM = \frac{1}{2} \underline{\hspace{1cm}} = \underline{\hspace{1cm}} \cdot 4 = \underline{\hspace{1cm}}$  (см), т. е. расстояние от точки \_\_\_\_\_ до прямой \_\_\_\_\_ равно \_\_\_\_\_ см.

Ответ. \_\_\_\_\_



### 96

Луч  $ME$  является биссектрисой угла  $TMP$ . Верно ли, что:

- точка  $A$  равноудалена от сторон угла  $TMP$ ;
- точка  $B$  не равноудалена от сторон угла  $TMP$ ;
- точка  $H$  равноудалена от сторон угла  $TMP$ ;
- точка  $C$  не равноудалена от сторон угла  $TMP$ ?

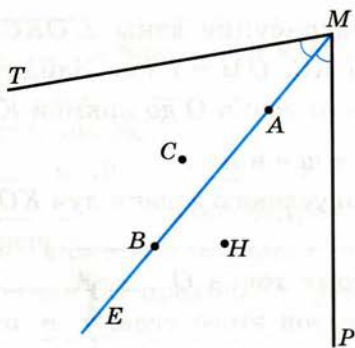
Решение.

а) Точка  $A$  лежит на биссектрисе  $ME$  угла \_\_\_\_\_, поэтому она \_\_\_\_\_ от сторон этого угла. Следовательно, данное утверждение о точке  $A$  \_\_\_\_\_

б) Точка  $B$  лежит на \_\_\_\_\_  $ME$  угла  $TMP$ , поэтому она \_\_\_\_\_ от \_\_\_\_\_ этого угла. Следовательно, данное утверждение о точке  $B$  \_\_\_\_\_

в) Если бы точка  $H$  была равноудалена от \_\_\_\_\_ угла  $TMP$ , то она лежала бы на \_\_\_\_\_ этого угла. Но точка  $H$  \_\_\_\_\_ на биссектрисе угла \_\_\_\_\_. Следовательно, данное утверждение о точке  $H$  \_\_\_\_\_

г) Если бы точка  $C$  была равноудалена от \_\_\_\_\_, то она \_\_\_\_\_ на биссектрисе этого \_\_\_\_\_. Следовательно, данное утверждение о точке  $C$  \_\_\_\_\_



## 97

Биссектрисы углов  $A$  и  $C$  треугольника  $ABC$  пересекаются в точке  $M$ . Найдите  $\angle ABM$ , если  $\angle MAC = 30^\circ$ ,  $\angle MCA = 20^\circ$ .

Решение.

Биссектрисы треугольника пересекаются в \_\_\_\_\_ точке, следовательно, луч  $BM$  — \_\_\_\_\_

\_\_\_\_\_ угла  $ABC$ , т. е.

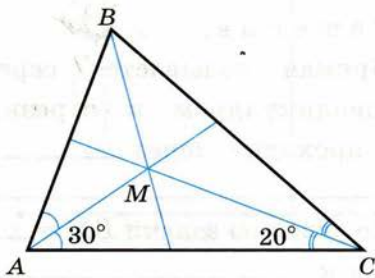
$\angle ABM = \frac{1}{2} \angle$  \_\_\_\_\_. По условию задачи лучи  $AM$  и  $CM$  \_\_\_\_\_

\_\_\_\_\_ углов  $A$  и \_\_\_\_\_, поэтому  $\angle A = 2 \cdot$  \_\_\_\_\_ = \_\_\_\_\_,  $\angle C = 2 \cdot$  \_\_\_\_\_ = \_\_\_\_\_.

Следовательно,  $\angle B = 180^\circ - (\angle$  \_\_\_\_\_ +  $\angle$  \_\_\_\_\_) =  $180^\circ -$  (\_\_\_\_\_ + \_\_\_\_\_) = \_\_\_\_\_, значит,  $\angle ABM =$

$= \frac{1}{2} \angle$  \_\_\_\_\_ = \_\_\_\_\_

Ответ.  $\angle ABM =$  \_\_\_\_\_





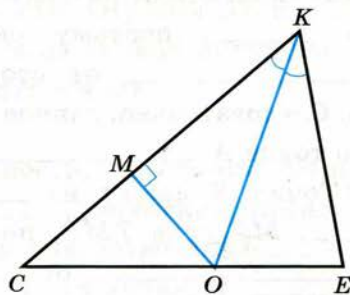
На рисунке даны  $\angle OKC = \angle EKO$ ,  $OM \perp KC$ ,  $OM = 7$  см. Найдите расстояние от точки  $O$  до прямой  $KE$ .

**Решение.**

По условию задачи луч  $KO$  является \_\_\_\_\_ угла \_\_\_\_\_, поэтому точка  $O$  \_\_\_\_\_ от сторон этого угла, т. е. от прямых \_\_\_\_\_ и \_\_\_\_\_

Расстоянием от точки  $O$  до прямой  $CK$  является длина \_\_\_\_\_  $OM$ , проведенного из точки \_\_\_\_\_ к этой прямой, т. е. расстояние от точки \_\_\_\_\_ до \_\_\_\_\_  $CK$  равно \_\_\_\_\_ см. Поэтому расстояние от \_\_\_\_\_  $O$  до \_\_\_\_\_  $KE$  равно \_\_\_\_\_ см.

**Ответ.** \_\_\_\_\_

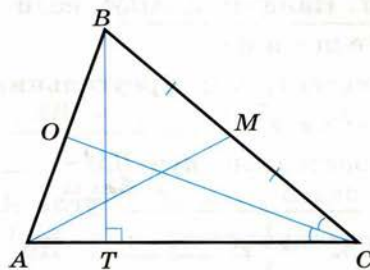


В треугольнике  $ABC$ , изображенном на рисунке,  $AC = BC \neq AB$ ,  $BM = MC$ ,  $BT \perp AC$ ,  $\angle ACO = \angle BCO$ . Какая из прямых  $AM$ ,  $CO$ ,  $BT$  является срединным перпендикуляром к стороне треугольника  $ABC$ ?

**Решение.**

Прямая называется срединным перпендикуляром к отрезку, если она проходит через \_\_\_\_\_ этого отрезка и \_\_\_\_\_ к нему.

По условию задачи  $BM = MC$ , но прямая  $AM$  не перпендикулярна к \_\_\_\_\_  $BC$ , так как в противном случае отрезок  $AM$  был бы медианой и \_\_\_\_\_ треугольника  $ABC$ , а тогда были бы равны стороны  $AB$  и \_\_\_\_\_, что неверно. Следовательно, прямая  $AM$  \_\_\_\_\_ срединным \_\_\_\_\_ к стороне  $BC$ .



По условию задачи  $BT \perp$  \_\_\_\_\_, но  $AT$  \_\_\_\_\_  $CT$ , так как в противном случае отрезок  $BT$  был бы высотой и \_\_\_\_\_ треугольника  $ABC$ , а тогда были бы \_\_\_\_\_ стороны  $AB$  и  $BC$ , что неверно. Следовательно, прямая  $BT$  \_\_\_\_\_ серединным \_\_\_\_\_ к стороне  $AC$ .

По условию задачи  $\angle ACO = \angle$  \_\_\_\_\_ и  $AC =$  \_\_\_\_\_, т. е. отрезок  $CO$  является \_\_\_\_\_ равнобедренного треугольника, а потому он является также его медианой и \_\_\_\_\_. Следовательно, прямая  $CO$  проходит через \_\_\_\_\_ отрезка  $AB$  и \_\_\_\_\_ к этому отрезку, т. е. \_\_\_\_\_ серединным \_\_\_\_\_ к стороне \_\_\_\_\_

О т в е т .

Серединным \_\_\_\_\_ к стороне треугольника  $ABC$  является прямая \_\_\_\_\_

## 100

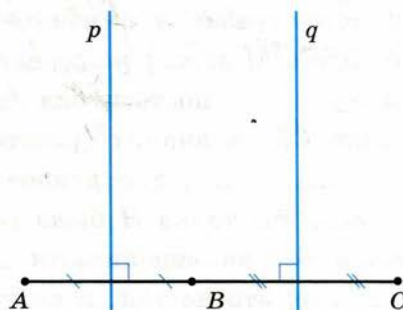
Точки  $A$ ,  $B$  и  $C$  не лежат на одной прямой; прямые  $p$  и  $q$  — серединные перпендикуляры к отрезкам  $AB$  и  $BC$ . Докажите, что прямые  $p$  и  $q$  пересекаются.

Д о к а з а т е л ь с т в о .

Предположим, что прямые  $p$  и  $q$  не пересекаются. По условию задачи  $p \perp AB$ , а из предположения следует, что  $p \parallel q$ , значит, по свойству параллельных прямых  $AB \perp q$ . Итак, через точку  $B$  проходят \_\_\_\_\_ прямые  $AB$  и \_\_\_\_\_, перпендикулярные к прямой  $q$ , что невозможно.

Следовательно, наше предположение неверно, а значит, серединные \_\_\_\_\_

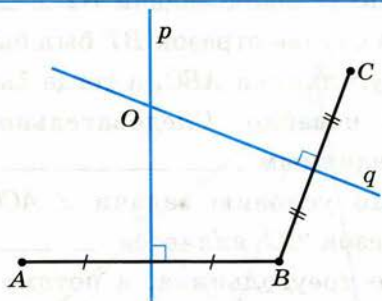
к отрезкам  $AB$  и  $BC$  \_\_\_\_\_



Прямые  $p$  и  $q$  — серединные перпендикуляры к отрезкам  $AB$  и  $BC$ . Докажите, что  $AO = OC$ .

Доказательство.

Так как прямая  $p$  — \_\_\_\_\_  
\_\_\_\_\_ перпендикуляр к \_\_\_\_\_  
 $AB$ , то  $AO =$  \_\_\_\_\_. Аналогично, так  
как прямая  $q$  — серединный \_\_\_\_\_  
к отрезку  $BC$ , то  $OB =$  \_\_\_\_\_. Итак,  $AO = OB =$  \_\_\_\_\_, поэтому  
 $AO =$  \_\_\_\_\_, что и требовалось доказать.



## 102

Прямая  $p$  — серединный перпендикуляр к отрезку  $CE$ . Верно ли, что:  
а) точка  $A$  равноудалена от концов отрезка  $CE$ ; б) расстояния от точки  $M$  до точек  $C$  и  $E$  не равны; в) точка  $H$  равноудалена от точек  $C$  и  $E$ ; г) точка  $T$  удалена на разные расстояния от концов отрезка  $CE$ ?

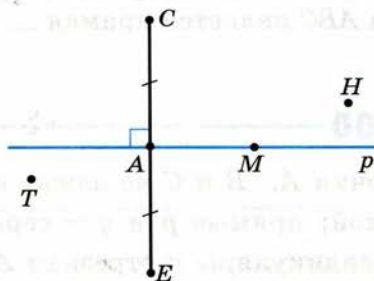
Решение.

а) Точка  $A$  лежит на \_\_\_\_\_ перпендикуляре к отрезку  $CE$ , следовательно, она \_\_\_\_\_ от концов этого отрезка, т. е. данное утверждение о точке  $A$  \_\_\_\_\_

б) Точка  $M$  лежит на серединном \_\_\_\_\_ к отрезку \_\_\_\_\_, поэтому она \_\_\_\_\_ от концов отрезка  $CE$ , а значит, расстояния от нее до точек  $C$  и \_\_\_\_\_, т. е. данное утверждение о точке  $M$  \_\_\_\_\_

в) Если бы точка  $H$  была равноудалена от точек  $C$  и  $E$ , то она лежала бы на серединном \_\_\_\_\_ к отрезку \_\_\_\_\_, но это не так, и поэтому данное утверждение о точке  $H$  \_\_\_\_\_

г) Если бы точка  $T$  была удалена на равные расстояния от точек  $C$  и  $E$ , то она лежала бы на серединном \_\_\_\_\_ к отрезку \_\_\_\_\_, что в данном случае не выполняется. Следовательно, данное утверждение о точке  $T$  \_\_\_\_\_

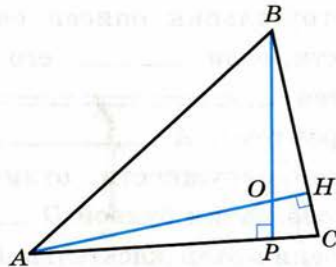




Отрезки  $AH$  и  $BP$  — высоты треугольника  $ABC$ . Проведите с помощью одной линейки (без делений) высоту из вершины  $C$ .

Решение.

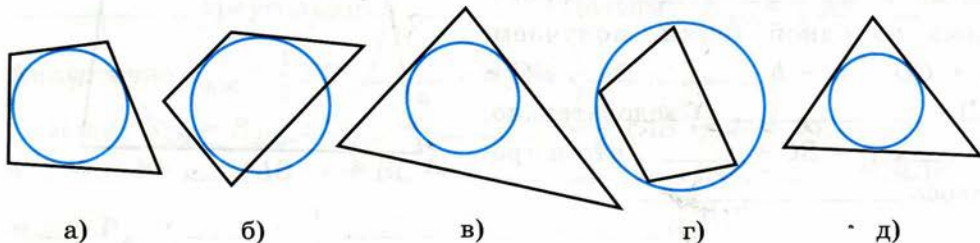
Высоты треугольника пересекаются в \_\_\_\_\_ точке, поэтому третья высота треугольника проходит через точку \_\_\_\_\_. С помощью линейки проведем прямую \_\_\_\_\_ и обозначим буквой  $T$  точку пересечения этой прямой с прямой  $AB$ . Отрезок \_\_\_\_\_ — искомая \_\_\_\_\_ треугольника  $ABC$ .



## § 4 Вписанная и описанная окружности

### 104

На каких рисунках  $a$  —  $d$  изображены многоугольник и вписанная в него окружность?



Решение.

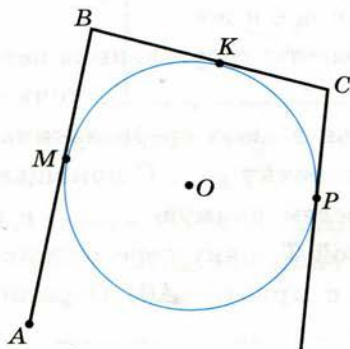
Окружность называется вписанной в \_\_\_\_\_, если \_\_\_\_\_ стороны многоугольника \_\_\_\_\_ окружности. Все \_\_\_\_\_ многоугольника касаются окружности на рисунках \_\_\_\_\_ и \_\_\_\_\_, следовательно, многоугольник и \_\_\_\_\_ в него окружность изображены на рисунках \_\_\_\_\_ и \_\_\_\_\_.

Ответ. \_\_\_\_\_ и \_\_\_\_\_.

Достройте четырехугольник  $ABCD$  так, чтобы он был описан около данной окружности.

Решение.

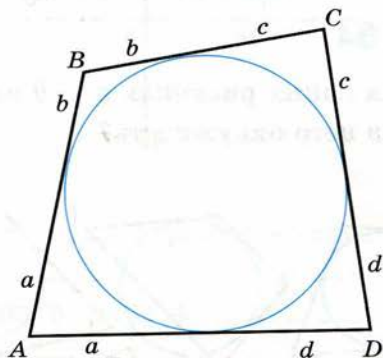
Многоугольник описан около окружности, если \_\_\_\_\_ его стороны касаются \_\_\_\_\_. Проведем через точку  $A$  \_\_\_\_\_ к данной окружности, отличную от  $AM$ , и обозначим буквой  $D$  \_\_\_\_\_ пересечения этой касательной и прямой  $CP$ . Четырехугольник \_\_\_\_\_ — искомый.



Четырехугольник  $ABCD$  описан около окружности. Докажите, что  $AB + CD = BC + AD$ .

Доказательство.

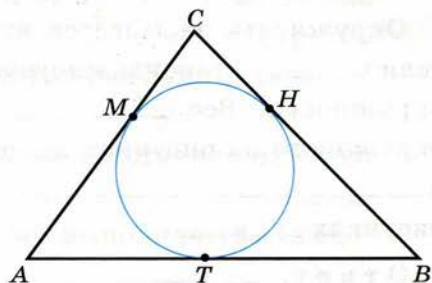
Используя свойство отрезков касательных к \_\_\_\_\_, проведенных из одной точки, получаем:  $AB + CD = a + b + \_ + \_$ ,  $BC + AD = \_$ . Следовательно,  $AB + \_ = BC + \_$ , что и требовалось \_\_\_\_\_



Окружность, вписанная в треугольник  $ABC$ , касается его сторон в точках  $H$ ,  $M$  и  $T$ . Найдите периметр треугольника  $ABC$ , если  $AM = 5$  м,  $CH = 3$  м,  $BT = 6$  м.

Решение.

Отрезки касательных к \_\_\_\_\_, проведенные из \_\_\_\_\_



одной \_\_\_\_\_, равны. Поэтому  $AT = \text{_____} = 5 \text{ м}$ ,  $CM = \text{_____} = \text{_____} \text{ м}$ ,  $BH = \text{_____} = \text{_____} \text{ м}$ . Следовательно,  $P_{ABC} = AM + MC + CH + \text{_____} = 2 \cdot (AM + \text{_____}) = \text{_____} \cdot (5 + \text{_____}) = \text{_____} \text{ (м)}$ .

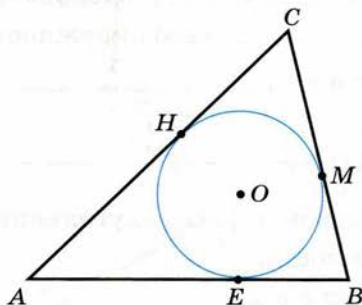
О т в е т.  $P_{ABC} = \text{_____} \text{ м}$ .

## 108

Найдите площадь треугольника  $ABC$ , если его периметр равен 60 см, а радиус  $r$  вписанной окружности равен 4 см.

Р е ш е н и е.

Соединим центр окружности с вершинами треугольника и точками  $H$ ,  $M$  и  $E$  касания сторон треугольника и окружности. Так как радиус, проведенный в точку \_\_\_\_\_,



перпендикулярен к касательной, то  $OH \perp \text{_____}$ , следовательно, отрезок  $OH$  — \_\_\_\_\_ треугольника  $AOC$ . Аналогично отрезок  $OM$  — высота \_\_\_\_\_  $BOC$ , отрезок  $OE$  — \_\_\_\_\_ треугольника \_\_\_\_\_. Поэтому  $S_{AOB} = \frac{1}{2} AB \cdot \text{_____}$ .

Аналогично  $S_{BOC} = \frac{1}{2} BC \cdot \text{_____}$  и  $S_{AOC} = \frac{1}{2} AC \cdot \text{_____}$

Итак,  $S_{ABC} = S_{AOB} + S_{BOC} + \text{_____} = \frac{1}{2} (AB \cdot OE + BC \cdot \text{_____} + \text{_____}) = \text{_____} (AB \cdot r + BC \cdot r + \text{_____}) = \text{_____} (AB + \text{_____} + AC)r = \text{_____} P_{ABC} \cdot \text{_____} = \frac{1}{2} \text{_____} = \text{_____} \text{ (см}^2\text{)}$ .

О т в е т. \_\_\_\_\_

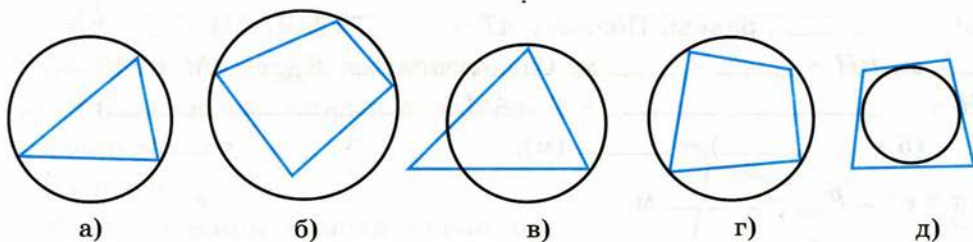
## 109

На каких рисунках  $a - d$  изображены многоугольник и описанная около него окружность?

Р е ш е н и е.

Окружность называется \_\_\_\_\_ около многоугольника, если \_\_\_\_\_ вершины многоугольника \_\_\_\_\_ на окружности.





Все вершины многоугольника \_\_\_\_\_ на окружности на рисунках \_\_\_\_\_ и \_\_\_\_\_, следовательно, многоугольник и описанная \_\_\_\_\_ него окружность изображены на рисунках \_\_\_\_\_ и \_\_\_\_\_

О т в е т . \_\_\_\_\_

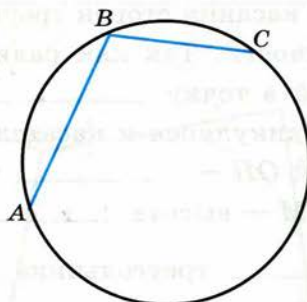
### 110

Достройте четырехугольник  $ABCD$  так, чтобы он был вписан в окружность.

Р е ш е н и е .

Многоугольник вписан в окружность, если \_\_\_\_\_ его вершины лежат на \_\_\_\_\_

Отметим на дуге  $AC$  точку  $D$  и проведем отрезки  $AD$  и \_\_\_\_\_. Четырехугольник \_\_\_\_\_ искомым.



### 111

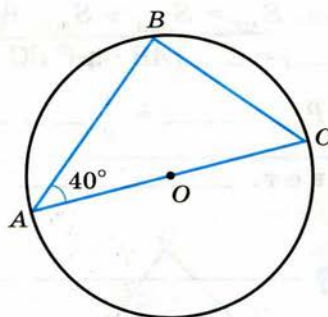
В треугольнике  $ABC$   $\angle A = 40^\circ$ . Найдите остальные углы треугольника, если центр описанной около него окружности лежит на стороне  $AC$ .

Р е ш е н и е .

Так как точки  $A$ ,  $B$  и \_\_\_\_\_ лежат на данной \_\_\_\_\_, а ее центр — точка  $O$  — лежит на отрезке \_\_\_\_\_, то отрезок  $AC$  — \_\_\_\_\_

данной окружности, а угол  $B$  является \_\_\_\_\_ в эту окружность и опирается на ее \_\_\_\_\_. Поэтому  $\angle B =$  \_\_\_\_\_, а  $\angle C = 180^\circ - (40^\circ + \text{_____}) =$  \_\_\_\_\_

О т в е т .  $\angle B =$  \_\_\_\_\_,  $\angle C =$  \_\_\_\_\_



## § 1

## Понятие вектора

112

На рисунке изображен ромб  $ABCD$ , где  $AB = 4$ ,  $\angle BAD = 60^\circ$ .

а) Началом каких ненулевых векторов служит точка  $B$ ?

б) Концом каких данных ненулевых векторов служит точка  $A$ ?

в) Как называется и обозначается вектор с началом и концом в точке  $C$ ?

г) Найдите длины (модули) векторов  $\vec{BC}$  и  $\vec{BD}$ .

д) Какой ненулевой вектор коллинеарен вектору  $\vec{BA}$ ?

е) Какие данные ненулевые векторы сонаправлены и какие противоположно направлены?

ж) Равны ли векторы  $\vec{BA}$  и  $\vec{CD}$ ,  $\vec{BC}$  и  $\vec{DA}$ ,  $\vec{BA}$  и  $\vec{BD}$ ,  $\vec{AO}$  и  $\vec{AC}$ ,  $\vec{AC}$  и  $\vec{BC}$ ,  $\vec{AO}$  и  $\vec{OC}$ ?

з) Какой вектор, равный вектору  $\vec{CD}$ , отложен от точки  $B$ ?

О т в е т. а)  $\vec{BA}$ , \_\_\_\_\_, \_\_\_\_\_; б) \_\_\_\_\_

в) вектор с началом и концом в \_\_\_\_\_  $C$  называется \_\_\_\_\_ и обозначается \_\_\_\_\_ или \_\_\_\_\_

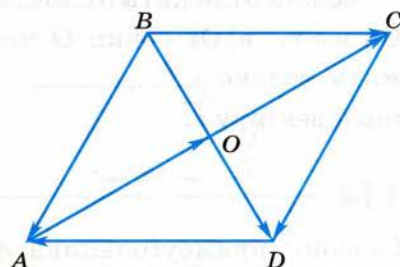
г)  $|\vec{BC}| =$  \_\_\_\_\_, \_\_\_\_\_

д) вектору  $\vec{BA}$  \_\_\_\_\_ вектор \_\_\_\_\_

е) сонаправлены ненулевые векторы \_\_\_\_\_ и \_\_\_\_\_, \_\_\_\_\_ и \_\_\_\_\_, противоположно \_\_\_\_\_ векторы \_\_\_\_\_ и \_\_\_\_\_

ж)  $\vec{BA}$  \_\_\_\_\_  $\vec{CD}$ , так как  $|\vec{BA}|$  \_\_\_\_\_  $|\vec{CD}|$  и  $\vec{BA} \uparrow\uparrow$  \_\_\_\_\_;  $\vec{BC}$  \_\_\_\_\_  $\vec{DA}$ , так как  $\vec{BC}$  и \_\_\_\_\_ не сонаправлены;  $\vec{BA}$  \_\_\_\_\_  $\vec{BD}$ , так как  $\vec{BA}$  и  $\vec{BD}$  \_\_\_\_\_;  $\vec{AO}$  \_\_\_\_\_  $\vec{AC}$ , так как  $|\vec{AO}|$  \_\_\_\_\_  $|\vec{AC}|$ ; \_\_\_\_\_

з) \_\_\_\_\_



а) Постройте ненулевой вектор с началом в точке  $O$ :

коллинеарный вектору  $\vec{a}$ ;

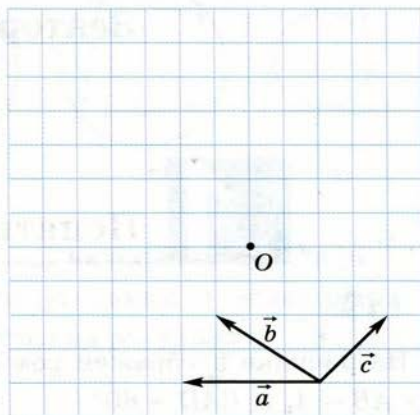
сонаправленный с вектором  $\vec{b}$ ;

противоположно направленный вектору  $\vec{c}$ .

б) Отложите от точки  $O$  вектор, равный вектору  $\vec{c}$ .

в) Сколько векторов, равных вектору  $\vec{c}$ , можно отложить от точки  $O$ ?

О т в е т. в) От точки  $O$  можно отложить только \_\_\_\_\_ вектор, равный вектору  $\vec{c}$ .



## 114

Стороны прямоугольника  $ABCD$  равны 3 дм и 4 дм. Найдите длину вектора  $\vec{AC}$ .

Р е ш е н и е.

Длина вектора  $\vec{AC}$  — это длина \_\_\_\_\_  $AC$ . Отрезок  $AC$  является \_\_\_\_\_ прямоугольника  $ABCD$ , следо-

вательно,  $AC = \sqrt{3^2 + \_\_\_\_\_\_} = \_\_\_\_\_\_ (дм)$ , т. е.  $|\vec{AC}| = \_\_\_\_\_\_ дм$ .

О т в е т. \_\_\_\_\_

## § 2

### Сложение и вычитание векторов

## 115

Используя правило треугольника, найдите сумму векторов:

а)  $\vec{PM}$  и  $\vec{MT}$ ; б)  $\vec{CH}$  и  $\vec{HC}$ ; в)  $\vec{AB} + \vec{0}$ ; г)  $\vec{0} + \vec{CE}$ .

Р е ш е н и е.

а)  $\vec{PM} + \vec{MT} = \_\_\_\_\_\_$

б)  $\vec{CH} + \vec{HC} = \_\_\_\_\_\_ = \_\_\_\_\_\_$

в)  $\vec{AB} + \vec{0} = \_\_\_\_\_\_ + \vec{BB} = \_\_\_\_\_\_$

г)  $\vec{0} + \vec{CE} = \_\_\_\_\_\_ + \vec{CE} = \_\_\_\_\_\_$

О т в е т. а) \_\_\_\_\_ ; б) \_\_\_\_\_ ; в) \_\_\_\_\_ ; г) \_\_\_\_\_

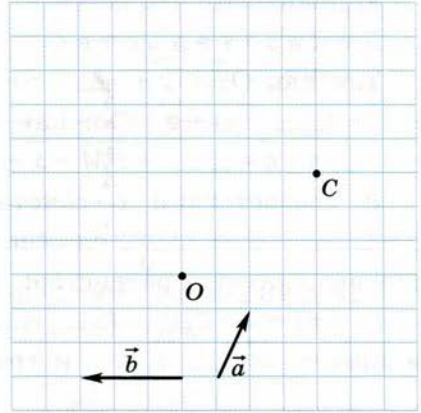


Используя правило треугольника, постройте векторы  $\vec{OA} = \vec{a} + \vec{b}$  и  $\vec{CB} = \vec{a} + \vec{b}$ . Определите вид четырехугольника  $OABC$ .

Решение.

Отложим от точки  $O$  вектор  $\vec{OM} = \vec{a}$  и от точки  $M$  вектор  $\vec{MA} = \vec{b}$ , тогда  $\vec{OA} = \vec{OM} + \vec{MA} = \vec{a} + \vec{b}$ . Аналогично строим  $\vec{CK} = \vec{a}$  и  $\vec{KB} = \vec{b}$ , тогда  $\vec{CB} = \vec{CK} + \vec{KB} = \vec{a} + \vec{b}$ . Так как  $\vec{OA} = \vec{a} + \vec{b}$  и  $\vec{CB} = \vec{a} + \vec{b}$ , следовательно,  $OA \parallel CB$  и  $OA = CB$ , поэтому четырехугольник  $OABC$  —

О т в е т. Четырехугольник  $OABC$  —



Используя правило параллелограмма, постройте векторы  $\vec{OP} = \vec{x} + \vec{y}$  и  $\vec{CT} = \vec{y} + \vec{x}$ . Докажите, что  $\vec{OC} = \vec{PT}$ .

Решение.

Отложим от точки  $O$  векторы  $\vec{OA} = \vec{x}$  и  $\vec{OB} = \vec{y}$ . Построим точку  $P$  так, чтобы четырехугольник  $OAPB$  был

параллелограммом, тогда по правилу параллелограмма  $\vec{OP} = \vec{OA} + \vec{OB} = \vec{x} + \vec{y}$ . Отложим от точки  $C$  векторы  $\vec{CM} = \vec{y}$  и  $\vec{CN} = \vec{x}$ .

Построим

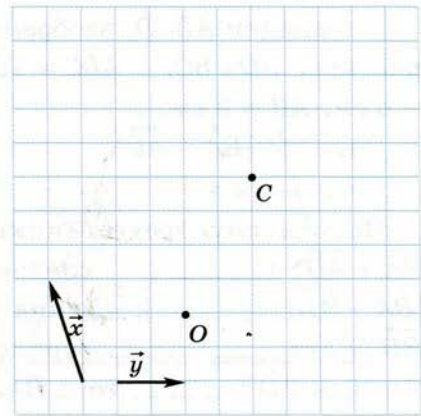
параллелограмм  $CMTE$ , тогда по правилу

$\vec{CT} = \vec{CM} + \vec{CN} = \vec{y} + \vec{x}$

Так как  $\vec{OP} = \vec{x} + \vec{y}$ ,  $\vec{CT} = \vec{y} + \vec{x}$  и  $\vec{x} + \vec{y} = \vec{y} + \vec{x}$  (переместительный закон

векторов), то  $\vec{OP} = \vec{CT}$ . Следовательно, четырехугольник  $OPTC$  —

параллелограммом, а потому  $\vec{OC} = \vec{PT}$ , что и требовалось доказать.



а) Постройте векторы  $\vec{OT} = \vec{x} + \vec{y}$  и  $\vec{PM} = \vec{y} + \vec{z}$ .

б) Отложите от точки  $H$  векторы  $\vec{m} = \vec{OT} + \vec{z}$  и  $\vec{n} = \vec{x} + \vec{PM}$ .

в) Докажите, что  $\vec{m} = \vec{n}$ .

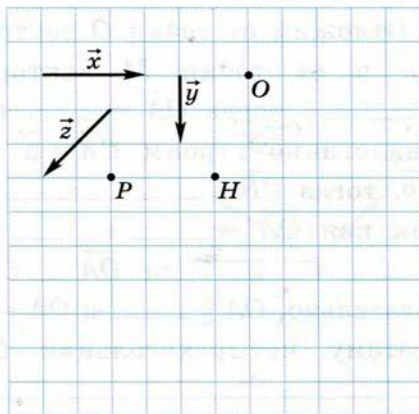
Доказательство.

Так как  $\vec{OT} = \vec{x} + \underline{\quad}$ , то  $\vec{m} = \vec{OT} + \vec{z} = (\underline{\quad} + \vec{y}) + \vec{z}$ . Так как  $\vec{PM} = \vec{y} + \underline{\quad}$ , то  $\vec{n} = \underline{\quad} + \vec{PM} = \vec{x} + (\underline{\quad} + \vec{z})$ .

В соответствии с сочетательным \_\_\_\_\_ сложения векторов выполняется равенство:

$$(\vec{x} + \vec{y}) + \vec{z} = \underline{\quad} + (\underline{\quad} + \underline{\quad}),$$

а значит,  $\vec{m} = \vec{n}$ , что и требовалось

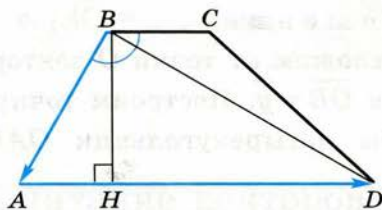


В трапеции  $ABCD$ , изображенной на рисунке,  $AD \parallel BC$ ,  $\angle ABC = 120^\circ$ ,  $AD = 6$  см,  $AB = 3$  см.

Найдите  $|\vec{BA} + \vec{AD}|$ .

Решение.

По правилу треугольника имеем:  $\vec{BA} + \vec{AD} = \underline{\quad}$ , следовательно,  $|\vec{BA} + \vec{AD}| = |\underline{\quad}|$ . Длина вектора  $\vec{BD}$  — это \_\_\_\_\_ отрезка \_\_\_\_\_. Так как  $AD \parallel \underline{\quad}$ , то  $\angle BAD = 180^\circ - \angle \underline{\quad} = \underline{\quad}$



Проведем высоту  $BH$  трапеции. В прямоугольном треугольнике  $ABH$  имеем:  $BH = AB \cdot \sin \underline{\quad} = 3 \cdot \underline{\quad} = \underline{\quad}$  (см),  $AH = \underline{\quad} \cdot \cos \underline{\quad} = \underline{\quad} \cdot \underline{\quad} = \underline{\quad}$  (см).

Из треугольника  $BHD$  по теореме Пифагора получаем:  $BD^2 = \underline{\quad} + (AD - \underline{\quad})^2 = \underline{\quad} + \underline{\quad} = \underline{\quad}$  (см<sup>2</sup>), откуда  $BD = \underline{\quad}$  см.

О т в е т. \_\_\_\_\_

Пользуясь правилами и законами сложения векторов, упростите выражение  $\vec{MC} + \vec{AM} + \vec{CT}$ .

Решение.

$$\begin{aligned} \vec{MC} + \vec{AM} + \vec{CT} &= \\ &= (\vec{MC} + \underline{\hspace{2cm}}) + \vec{CT} = \\ &= (\vec{AM} + \underline{\hspace{2cm}}) + \vec{CT} = \\ &= \underline{\hspace{2cm}} + \vec{CT} = \underline{\hspace{2cm}} \end{aligned}$$

Ответ. \_\_\_\_\_

Обоснование.

\_\_\_\_\_ закон  
 \_\_\_\_\_ закон  
 \_\_\_\_\_ треугольника  
 правило \_\_\_\_\_

Пользуясь правилом многоугольника и законами сложения векторов, упростите выражение  $\vec{BH} + \vec{HK} + \vec{TP} + \vec{MT} + \vec{KM}$ .

Решение.

$$\begin{aligned} \vec{BH} + \vec{HK} + \vec{TP} + \vec{MT} + \underline{\hspace{2cm}} &= \underline{\hspace{2cm}} + \vec{TP} + \vec{MT} + \underline{\hspace{2cm}} = \\ &= \vec{BK} + \underline{\hspace{2cm}} + \vec{TP} + \vec{MT} = \underline{\hspace{2cm}} + \vec{MT} + \underline{\hspace{2cm}} = \underline{\hspace{2cm}} + \vec{TP} = \\ &= \underline{\hspace{2cm}} \end{aligned}$$

Ответ. \_\_\_\_\_

В трапеции  $ВСЕН$ , изображенной на рисунке,  $BH = 2CE$ , точка  $O$  — середина  $BH$ . Какие векторы с концом и началом в отмеченных точках являются противоположными вектору  $\vec{OH}$ ?

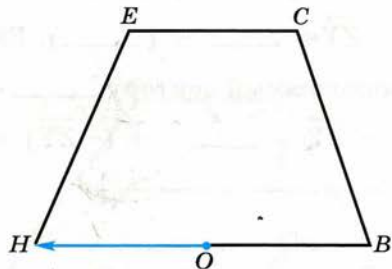
Решение.

По определению противоположным вектору  $\vec{OH}$  является вектор, направление которого \_\_\_\_\_ направлению вектора \_\_\_\_\_, а длина \_\_\_\_\_ длине вектора  $\vec{OH}$ .

Противоположно направлены вектору  $\vec{OH}$  векторы  $\vec{HB}$ , \_\_\_\_\_, \_\_\_\_\_, \_\_\_\_\_. Из них имеют длину, равную \_\_\_\_\_ вектора  $\vec{OH}$ , векторы \_\_\_\_\_, \_\_\_\_\_, \_\_\_\_\_

Итак, \_\_\_\_\_ вектору  $\vec{OH}$  являются векторы \_\_\_\_\_, \_\_\_\_\_, \_\_\_\_\_

Ответ. \_\_\_\_\_





Какой из векторов  $\vec{CM}$ ,  $\vec{CP}$ ,  $\vec{PM}$ ,  $\vec{PC}$  равен разности векторов  $\vec{MC}$  и  $\vec{MP}$ ?

Решение.

По определению разностью векторов  $\vec{MC}$  и  $\vec{MP}$  является вектор  $\vec{x}$ , такой, что  $\underline{\hspace{2cm}} + \vec{x} = \underline{\hspace{2cm}}$

Проверим, какой из данных векторов удовлетворяет этому условию:

$$\vec{MP} + \vec{CM} \underline{\hspace{1cm}} \vec{MC}, \text{ следовательно, } \vec{CM} \neq \vec{MC} - \underline{\hspace{1cm}}$$

$$\vec{MP} + \vec{CP} \underline{\hspace{1cm}} \vec{MC}, \text{ следовательно, } \vec{CP} \underline{\hspace{1cm}} \vec{MC} - \vec{MP}.$$

$$\vec{MP} + \vec{PM} \underline{\hspace{1cm}}, \text{ т. е. } \vec{PM} \underline{\hspace{1cm}} \vec{MC} - \vec{MP}.$$

$$\vec{MP} + \underline{\hspace{2cm}}, \text{ т. е. } \vec{PC} \underline{\hspace{1cm}} \vec{MC} - \vec{MP}.$$

О т в е т.  $\underline{\hspace{2cm}}$

Докажите, что для любых трех точек  $X, Y, Z$  верно равенство  $\vec{XY} - \vec{ZY} = \vec{XY} + \vec{YZ}$ .

Доказательство.

По теореме о разности векторов  $\vec{a} - \vec{b} = \vec{a} + (\underline{\hspace{1cm}})$ , поэтому  $\vec{XY} - \vec{ZY} = \underline{\hspace{1cm}} + (\underline{\hspace{1cm}})$ . Запись « $-\vec{ZY}$ » означает «вектор, противоположный вектору  $\underline{\hspace{1cm}}$ », т. е.  $-\vec{ZY} = \underline{\hspace{1cm}}$ . Следовательно,  $\vec{XY} - \vec{ZY} = \underline{\hspace{1cm}} + (-\vec{ZY}) = \vec{XY} + \underline{\hspace{1cm}}$ , что и требовалось

Упростите выражение  $(\vec{HB} + \vec{BA} - \vec{TA}) - (\vec{PX} - \vec{TX})$ .

Решение.

$$\begin{aligned} (\vec{HB} + \vec{BA} - \vec{TA}) - (\vec{PX} - \underline{\hspace{1cm}}) &= (\underline{\hspace{1cm}} - \vec{TA}) - \\ - (\vec{PX} + (-\underline{\hspace{1cm}})) &= (\vec{HA} + (-\underline{\hspace{1cm}})) - (\vec{PX} + \underline{\hspace{1cm}}) = \\ = (\vec{HA} + \underline{\hspace{1cm}}) - \underline{\hspace{1cm}} &= \underline{\hspace{1cm}} + (-\underline{\hspace{1cm}}) = \\ = \vec{HT} + \underline{\hspace{1cm}} &= \underline{\hspace{1cm}} \end{aligned}$$

О т в е т.  $\underline{\hspace{2cm}}$

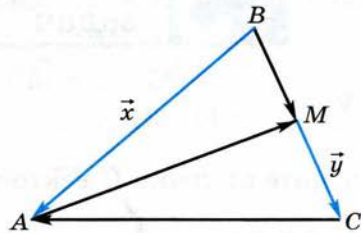
Отрезок  $AM$  — медиана треугольника  $ABC$ . Выразите векторы  $\vec{BM}$ ,  $\vec{AM}$ ,  $\vec{CA}$  через векторы  $\vec{BA} = \vec{x}$  и  $\vec{MC} = \vec{y}$ .

О т в е т.

$$\vec{BM} = \underline{\hspace{2cm}}$$

$$\vec{AM} = \underline{\hspace{2cm}} - \underline{\hspace{2cm}}$$

$$\vec{CA} = -\vec{y} - \underline{\hspace{2cm}} + \underline{\hspace{2cm}}$$



## 127

Найдите вектор  $\vec{x}$ , если:

а)  $\vec{PO} - \vec{x} = \vec{PM}$ ; б)  $\vec{x} - \vec{MA} = \vec{PM}$ ; в)  $\vec{CM} - \vec{x} = \vec{PM}$ .

Р е ш е н и е.

а)  $\vec{PO} - \vec{x} = \vec{PM}$ , следовательно,  $\vec{PO} = \vec{PM} + \underline{\hspace{2cm}}$ , откуда  $\vec{x} = \vec{PO} - \underline{\hspace{2cm}} = \vec{PO} + \underline{\hspace{2cm}} = \underline{\hspace{2cm}}$

б)  $\vec{x} - \vec{MA} = \vec{PM}$ , отсюда  $\vec{x} = \underline{\hspace{2cm}} + \underline{\hspace{2cm}} = \underline{\hspace{2cm}}$

в)  $\vec{CM} - \vec{x} = \vec{PM}$ , поэтому  $\vec{x} = \vec{CM} - \underline{\hspace{2cm}} = \vec{CM} + \underline{\hspace{2cm}} = \underline{\hspace{2cm}}$

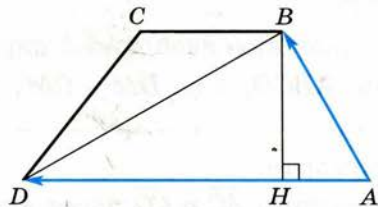
О т в е т. а)  $\underline{\hspace{2cm}}$ ; б)  $\underline{\hspace{2cm}}$ ; в)  $\underline{\hspace{2cm}}$

## 128

В трапеции  $ABCD$ , изображенной на рисунке,  $AD \parallel BC$ ,  $\angle ABC = 120^\circ$ ,  $AD = 6$  м,  $AB = 3$  м. Найдите  $|\vec{AB} - \vec{AD}|$ .

Р е ш е н и е.

$\vec{AB} - \vec{AD} = \underline{\hspace{2cm}}$ , следовательно,  $|\vec{AB} - \vec{AD}| = |\underline{\hspace{2cm}}| = \underline{\hspace{2cm}}$ . Так как  $AD \parallel \underline{\hspace{2cm}}$ , то  $\angle BAD = 180^\circ - \angle \underline{\hspace{2cm}} = \underline{\hspace{2cm}}$



Проведем высоту  $BH$  трапеции. В треугольнике  $ABH$  имеем:  $BH = AB \cdot \sin \underline{\hspace{2cm}} = \underline{\hspace{2cm}} \cdot \underline{\hspace{2cm}} = \underline{\hspace{2cm}}$  (м),  $HA = AB \cdot \underline{\hspace{2cm}} = \underline{\hspace{2cm}} \cdot \underline{\hspace{2cm}} = \underline{\hspace{2cm}}$  (м). Тогда  $DH = AD - \underline{\hspace{2cm}} = \underline{\hspace{2cm}}$  (м).

Из треугольника  $BHD$  по теореме Пифагора находим:

$$BD^2 = \underline{\hspace{2cm}} + \underline{\hspace{2cm}} = (\underline{\hspace{2cm}} + \underline{\hspace{2cm}}) = \underline{\hspace{2cm}} \text{ (м}^2\text{)},$$

откуда  $BD = \underline{\hspace{2cm}}$  м.

Итак,  $|\vec{AB} - \vec{AD}| = \underline{\hspace{2cm}} = \underline{\hspace{2cm}}$  м.

О т в е т.  $\underline{\hspace{2cm}}$

# § 3

## Умножение вектора на число. Применение векторов к решению задач

129

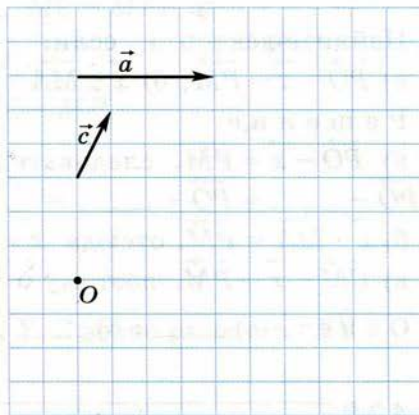
Отложите от точки  $O$  векторы  $\vec{x} = \frac{1}{2}\vec{a}$ ,  $\vec{y} = 2\vec{c}$ ,  $\vec{z} = \frac{1}{2}\vec{a} + 2\vec{c}$ .

Решение.

Так как  $\vec{x} = \frac{1}{2}\vec{a}$ , то, согласно определению произведения вектора на число,  $\vec{x} \uparrow \uparrow \vec{a}$  и  $|\vec{x}| = \frac{1}{2}|\vec{a}|$ . Отложим от точки  $O$  вектор  $\vec{x}$ .

Аналогично  $\vec{y} \uparrow \uparrow \vec{c}$  и  $|\vec{y}| = 2|\vec{c}|$ . Отложим от точки  $O$  вектор  $\vec{y}$ .

$\vec{z} = \frac{1}{2}\vec{a} + 2\vec{c} = \vec{x} + \vec{y}$ . Так как векторы  $\vec{x}$  и  $\vec{y}$  отложены от точки  $O$ , построить вектор  $\vec{z} = \vec{x} + \vec{y}$  удобно по правилу параллелограмма. Строим вектор  $\vec{z}$ .



130

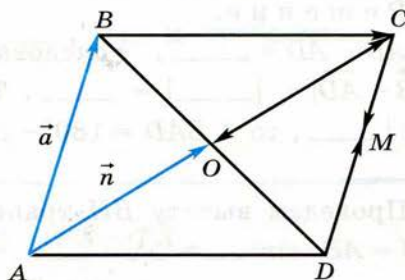
На рисунке изображен параллелограмм  $ABCD$ , где  $DM = CM$ ,  $\vec{AO} = \vec{n}$ ,  $\vec{AB} = \vec{a}$ .

Выразите:

- векторы  $\vec{AC}$  и  $\vec{CO}$  через вектор  $\vec{n}$ ;
- векторы  $\vec{DM}$  и  $\vec{CM}$  через вектор  $\vec{a}$ ;
- вектор  $\vec{BC}$  через векторы  $\vec{a}$  и  $\vec{n}$ .

Решение.

а) Так как точка  $O$  является точкой пересечения диагоналей параллелограмма, то  $AO = CO$ , и, значит,  $|\vec{AC}| = 2|\vec{AO}|$ . Кроме того,  $\vec{AC} \uparrow \uparrow \vec{AO}$ , следовательно, согласно определению произведения вектора на число,  $\vec{AC} = 2\vec{AO} = 2\vec{n}$ . Далее,  $|\vec{CO}| = |\vec{AO}|$  и  $\vec{CO} \downarrow \downarrow \vec{AO}$ , поэтому  $\vec{CO} = -\vec{AO} = -\vec{n}$ .





б) Противоположные стороны параллелограмма  $\overrightarrow{DC} = \overrightarrow{AB} = \vec{a}$ . Далее,  $\overrightarrow{DM} \uparrow \overrightarrow{DC}$  и  $|\overrightarrow{DM}| = \frac{1}{2} |\overrightarrow{DC}|$ , следовательно, согласно определению вектора на  $\overrightarrow{DC}$ ,  $\overrightarrow{DM} = \frac{1}{2} \overrightarrow{DC} = \frac{1}{2} \vec{a}$ . Так как  $\overrightarrow{CM} \uparrow \overrightarrow{DC}$  и  $|\overrightarrow{CM}| = \frac{1}{2} |\overrightarrow{DC}|$ , то  $\overrightarrow{CM} = \frac{1}{2} \overrightarrow{DC} = \frac{1}{2} \vec{a}$ .  
 в) По правилу треугольника  $\overrightarrow{BC} = \overrightarrow{BA} + \overrightarrow{AC}$ . Но  $\overrightarrow{BA} = -\vec{a}$ ,  $\overrightarrow{AC} = 2\vec{n}$ , следовательно,  $\overrightarrow{BC} = -\vec{a} + 2\vec{n}$ .

О т в е т .

а) \_\_\_\_\_

б) \_\_\_\_\_

в) \_\_\_\_\_

### 131

Упростите выражение:

а)  $-0,5(12\vec{a})$ ;

б)  $2,5\vec{b} - 1,7\vec{b}$ ;

в)  $3(\vec{c} + \vec{p}) - 5\vec{p}$ ;

г)  $2(5\vec{p} - 3\vec{q}) - 3(3\vec{p} - 2\vec{q})$ .

Р е ш е н и е .

а)  $-0,5(12\vec{a}) = (-0,5 \cdot 12) \vec{a} = -6\vec{a}$

б)  $2,5\vec{b} - 1,7\vec{b} = (2,5 - 1,7) \vec{b} = 0,8\vec{b}$

в)  $3(\vec{c} + \vec{p}) - 5\vec{p} = 3\vec{c} + 3\vec{p} - 5\vec{p} = 3\vec{c} - 2\vec{p} = 3\vec{c} + (-2)\vec{p} = 3\vec{c} - 2\vec{p}$

г)  $2(5\vec{p} - 3\vec{q}) - 3(3\vec{p} - 2\vec{q}) = 10\vec{p} - 6\vec{q} - 9\vec{p} + 6\vec{q} = \vec{p}$

О т в е т . а)  $-6\vec{a}$ ; б)  $0,8\vec{b}$ ; в)  $3\vec{c} - 2\vec{p}$ ; г)  $\vec{p}$ .

### 132

Докажите, что векторы  $\vec{c} = 2(\vec{a} + 1,5\vec{p}) - 3\vec{p}$  и  $\vec{a}$  коллинеарны.

Д о к а з а т е л ь с т в о .

$\vec{c} = 2(\vec{a} + 1,5\vec{p}) - 3\vec{p} = 2\vec{a} + 3\vec{p} - 3\vec{p} = 2\vec{a} + (3 - 3)\vec{p} = 2\vec{a} + 0\vec{p} = 2\vec{a}$ . По определению произведения вектора на  $0$  векторы  $\vec{a}$  и  $2\vec{a}$  коллинеарны, что и требовалось доказать.

Докажите, что для любого вектора  $\vec{a}$  справедливы равенства:

а)  $1 \cdot \vec{a} = \vec{a}$ ; б)  $(-1) \cdot \vec{a} = -\vec{a}$ .

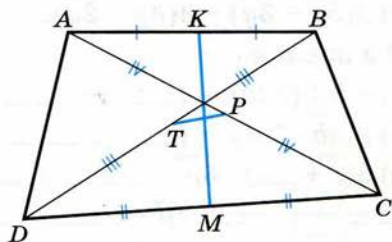
Доказательство.

Если  $\vec{a} = \vec{0}$ , то обе части каждого равенства — нулевые векторы, поэтому равенства справедливы. Пусть  $\vec{a} \neq \vec{0}$ .

а) По определению произведения вектора на \_\_\_\_\_  
 $|1 \cdot \vec{a}| = |1| \cdot |\vec{a}| = 1 \cdot |\vec{a}| = |\vec{a}|$ , а так как число 1 положи-  
 тельно, то векторы  $1 \cdot \vec{a}$  и  $\vec{a}$  \_\_\_\_\_.  
 Следовательно, по определению равных векторов  $1 \cdot \vec{a} = \vec{a}$ .

б) По определению \_\_\_\_\_ вектора  
 на число  $|(-1) \cdot \vec{a}| = |(-1)| \cdot |\vec{a}| = 1 \cdot |\vec{a}| = |\vec{a}|$ , а так как  
 $-1 < 0$ , то векторы  $(-1) \cdot \vec{a}$  и  $\vec{a}$  противоположно \_\_\_\_\_  
 \_\_\_\_\_. По определению противоположного вектора  $|-\vec{a}| = |\vec{a}|$   
 и  $-\vec{a} \uparrow \downarrow \vec{a}$ . Следовательно,  $|(-1)\vec{a}| = |-\vec{a}|$  и  $(-1)\vec{a} \uparrow \downarrow \vec{a}$ ,  
 т. е.  $(-1) \cdot \vec{a} = -\vec{a}$ .

Точки  $K$  и  $M$  — середины сторон  $AB$  и  $CD$  четырехугольника  $ABCD$ , изображенного на рисунке, точки  $P$  и  $T$  — середины диагоналей  $AC$  и  $BD$ . Докажите, что середины отрезков  $KM$  и  $PT$  совпадают.



Доказательство.

Пусть точка  $X$  — середина отрезка  $KM$ , точка  $Y$  — середина отрезка  $PT$ . Тогда для произвольной точки  $O$  имеем:

$$\vec{OX} = \frac{1}{2}(\vec{OK} + \vec{OM}) \quad (1)$$

и

$$\vec{OY} = \frac{1}{2}(\vec{OP} + \vec{OT}). \quad (2)$$

По условию задачи точки  $K$  и  $M$  — середины отрезков  $AB$  и \_\_\_\_\_, следовательно,  $\vec{OK} = \frac{1}{2}(\vec{OA} + \vec{OB})$  и  $\vec{OM} = \frac{1}{2}(\vec{OC} + \vec{OD})$ . Аналогично  $\vec{OP} = \frac{1}{2}(\vec{OA} + \vec{OC})$  и  $\vec{OT} = \frac{1}{2}(\vec{OB} + \vec{OD})$ .

Подставляя найденные выражения в формулы (1) и (2), получим:

$$\vec{OX} = \frac{1}{2} \left( \frac{1}{2}(\vec{OA} + \vec{OB}) + \frac{1}{2}(\vec{OC} + \vec{OD}) \right) = \frac{1}{4}(\vec{OA} + \vec{OB} + \vec{OC} + \vec{OD}),$$

$$\vec{OY} = \frac{1}{2} \left( \frac{1}{2}(\vec{OA} + \vec{OC}) + \frac{1}{2}(\vec{OB} + \vec{OD}) \right) = \frac{1}{4}(\vec{OA} + \vec{OB} + \vec{OC} + \vec{OD}).$$

Отсюда следует, что  $\vec{OX} = \vec{OY}$ . Так как от точки  $O$  можно отложить только \_\_\_\_\_ вектор, равный данному, то точки  $X$  и \_\_\_\_\_ совпадают, следовательно, совпадают середины отрезков \_\_\_\_\_ и \_\_\_\_\_, что и требовалось доказать.

### 135

В трапеции  $ABCD$ , изображенной на рисунке,  $AK = KB$ ,  $CM = MD$ ,  $BP = PK$ ,  $CT = TM$ ,  $BC = 2$  м,  $AD = 8$  м. Найдите  $PT$ .

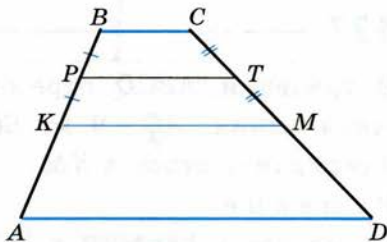
Решение.

Так как  $AK = KB$  и  $CM = MD$ , то отрезок  $KM$  — средняя \_\_\_\_\_ трапеции, следовательно,  $KM \parallel BC$  и  $KM = \frac{1}{2}(BC + AD) = \frac{1}{2}(2 + 8) = 5$  (м).

В четырехугольнике  $BCKM$  стороны  $BC$  и  $KM$  \_\_\_\_\_, а стороны  $BK$  и \_\_\_\_\_ не параллельны, следовательно,  $BCKM$  — \_\_\_\_\_ . По условию задачи  $BP = PK$  и  $CT = TM$ , поэтому отрезок  $PT$  — средняя \_\_\_\_\_ трапеции  $BCKM$ , и, следовательно,  $PT = \frac{1}{2}(BC + KM) = \frac{1}{2}(2 + 5) = 3.5$  (м).

Ответ.

\_\_\_\_\_

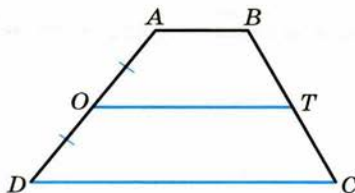


### 136

Прямая  $OT$  параллельна основанию  $CD$  трапеции  $ABCD$ , причем  $AO = OD$ . Докажите, что отрезок  $OT$  — средняя линия трапеции.

Доказательство.

В соответствии с определением средней \_\_\_\_\_ трапеции нужно доказать, что точка  $T$  является \_\_\_\_\_ стороны  $BC$ .





Предположим, что это не так, и пусть серединой стороны  $BC$  является точка  $X$ . Тогда отрезок  $OX$  — \_\_\_\_\_ линия трапеции, поэтому  $OX \perp CD$ . Но по условию задачи  $OT \perp CD$ .

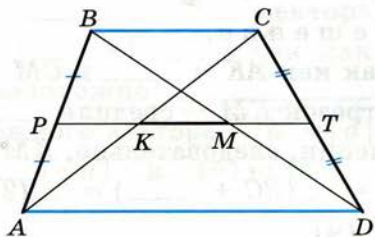
Итак, через точку  $O$  проходят \_\_\_\_\_ прямые, параллельные прямой \_\_\_\_\_, что противоречит \_\_\_\_\_ параллельных прямым. Следовательно, точка  $T$  — \_\_\_\_\_  $BC$ , т. е. отрезок  $OT$  — \_\_\_\_\_ трапеции, что и требовалось \_\_\_\_\_

### 137

В трапеции  $ABCD$  отрезок  $PT$  — средняя линия,  $AD = 9$  м,  $BC = 5$  м. Найдите длину отрезка  $KM$ .

Решение.

По свойству средней \_\_\_\_\_ трапеции  $PT \parallel BC$  и  $PT = \frac{1}{2}(AD + BC)$ . В треугольнике  $ABC$  отрезки  $AP$  и  $PB$  равны и прямая  $PK$  параллельна стороне \_\_\_\_\_, следовательно, отрезок  $PK$  — \_\_\_\_\_ линия треугольника  $ABC$  (задача 65). Поэтому  $PK = \frac{1}{2}BC$ . Аналогично в треугольнике  $BCD$   $TM = \frac{1}{2}BC$ .



Итак,  $KM = PT - (PK + TM) = \frac{1}{2}(AD + BC) - (\frac{1}{2}BC + \frac{1}{2}BC) = \frac{1}{2}(AD - BC) = \frac{1}{2}(9 - 5) = 2$  (м).

Ответ. \_\_\_\_\_

## ОГЛАВЛЕНИЕ

### Глава V. Четырехугольники

§ 1. Многоугольники	3
§ 2. Параллелограмм и трапеция	5
§ 3. Прямоугольник, ромб, квадрат	11

### Глава VI. Площадь

§ 1. Площадь многоугольника	14
§ 2. Площади параллелограмма, треугольника и трапеции	16
§ 3. Теорема Пифагора	21

### Глава VII. Подобные треугольники

§ 1. Определение подобных треугольников	23
§ 2. Признаки подобия треугольников	25
§ 3. Применение подобия к доказательству теорем и решению задач	27
§ 4. Соотношения между сторонами и углами прямоугольного треугольника	33

### Глава VIII. Окружность

§ 1. Касательная к окружности	37
§ 2. Центральные и вписанные углы	40
§ 3. Четыре замечательные точки треугольника	44
§ 4. Вписанная и описанная окружности	49

### Глава IX. Векторы

§ 1. Понятие вектора	53
§ 2. Сложение и вычитание векторов	54
§ 3. Умножение вектора на число. Применение векторов к решению задач	60



**Учебно-методический  
комплект по геометрии  
для 7 – 9 классов :**

**В. Ф. Бутузов**

**РАБОЧАЯ ПРОГРАММА**

к учебнику Л. С. Атанасяна и др.

Л. С. Атанасян, В. Ф. Бутузов,  
С. Б. Кадомцев, Э. Г. Позняк, И. И. Юдина

**УЧЕБНИК**

Л. С. Атанасян, В. Ф. Бутузов, Ю. А. Глазков, И. И. Юдина

**РАБОЧИЕ ТЕТРАДИ**

Б. Г. Зив, В. М. Мейлер

**ДИДАКТИЧЕСКИЕ МАТЕРИАЛЫ**

М. А. Иченская

**САМОСТОЯТЕЛЬНЫЕ И КОНТРОЛЬНЫЕ РАБОТЫ**

Т. М. Мищенко, А. Д. Блинков

**ТЕМАТИЧЕСКИЕ ТЕСТЫ**

Л. С. Атанасян, В. Ф. Бутузов,  
Ю. А. Глазков, В. Б. Некрасов, И. И. Юдина

**ИЗУЧЕНИЕ ГЕОМЕТРИИ**

в 7 – 9 классах

Б. Г. Зив, В. М. Мейлер, А. Г. Баханский

**ЗАДАЧИ ПО ГЕОМЕТРИИ**

для 7 – 11 классов



  
**ПРОСВЕЩЕНИЕ**  
ИЗДАТЕЛЬСТВО

Геометрия. Рабочая тетрадь  
8 класса общеобразовательн



2 050000 001451

Цена: 119,00