МАТЕМАТИКА

5–6 классы

по НОВОМУ образовательному стандарту (второго поколения)

УМК

В.А. Гусев

МАТЕМАТИКА
сборник геометрических задач

Ко всем учебникам по математике за 5–6 классы

- Свойства геометрических понятий, представления о геометрических фигурах
- Отрезки и их измерение, ломаная
- Углы и их свойства
- Треугольники
- Окружность и круг, квадрат и прямоугольник
- Ответы, решения, указания

5/6 классы

ЭКЗАМЕН

Учебно-методический комплект

В.А. Гусев

МАТЕМАТИКА

Сборник геометрических задач

Ко всем учебникам
по математике за 5–6 классы

5-6 классы

Рекомендовано
Российской Академией Образования

Издательство
«ЭКЗАМЕН»
МОСКВА • 2011

УДК 372.8:514
ББК 74.262.21
Г96

Гусев, В.А.

Г96 Математика. Сборник геометрических задач: 5–6 классы / В.А. Гусев. — М.: Издательство «Экзамен», 2011. — 255, [1] с. (Серия «Учебно-методический комплект»)

ISBN 978-5-377-03305-9

Данное пособие полностью соответствует новому образовательному стандарту (второго поколения).

Пособие является необходимым дополнением ко всем учебникам по математике за 5–6 классы, рекомендованным Министерством образования и науки Российской Федерации и включенным в Федеральный перечень учебников.

Сборник содержит задачи по курсу геометрии в соответствии с программой основной школы. Он состоит из двух частей: в первую часть включены задачи, относящиеся к темам обязательной программы, во вторую — ответы, решения, указания.

Задачи в сборнике распределены по 8 главам, охватывающим все темы курса математики 5–6 классов.

Пособие рассчитано на преподавателей школ, лицеев и гимназий, оно также может быть использовано учащимися для самоподготовки и самоконтроля.

Приказом № 729 Министерства образования и науки Российской Федерации учебные пособия издательства «Экзамен» допущены к использованию в общеобразовательных учреждениях.

УДК 372.8:514
ББК 74.262.21

Подписано в печать 16.12.2010. Формат 84x108/32.
Гарнитура «Таймс». Бумага газетная. Уч.-изд. л. 10,13. Усл. печ. л. 13,44.
Тираж 150 000 (1-й завод – 7000) экз. Заказ № 11384.

ISBN 978-5-377-03305-9

Оглавление

Глава 4
ЛОМАНАЯ

Глава 5
УГЛЫ И ИХ СВОЙСТВА

Глава 6
ТРЕУГОЛЬНИКИ

Глава 7
ОКРУЖНОСТЬ И КРУГ

Глава 8
КВАДРАТ И ПРЯМОУГОЛЬНИК

ОТВЕТЫ. РЕШЕНИЯ. УКАЗАНИЯ

Обращение к читателю

Мы начинаем издавать серию задачников по геометрии для 5–11 классов средней школы под общим названием «Готовимся к ЕГЭ по геометрии». Чем эти задачники отличаются от тех, которые имеются в практике обучения геометрии в средней школе? Какие основные проблемы мы хотим поставить и решить в этих задачниках?

1. Прежде всего мы продолжаем изучать проблему совершенствования процесса обучения геометрии в средней школе, которая в нашей стране многие десятилетия исследуется и по которой накоплен огромный опыт.

Особенно интенсивно эти проблемы ставились и решались во второй половине XX века. Начиная с 50–60-х годов прошлого века, появилось множество учебников и задачников по геометрии, в основном создаваемых под руководством и при непосредственном участии выдающегося математика академика А.Н. Колмогорова.

Одной из целей предлагаемой серии сборников задач является сохранение накопленного за этот период в России фонда задач по геометрии для средней школы и использование его в условиях дифференцированного обучения математике.

Программу по геометрии для средней школы в разное время наполняло разное содержание, однако набор тем оставался практически одним и тем же. Естественно, что менялся порядок изучения тем курса геометрии, появлялись новые темы, но основа содержания обучения традиционно сохранялась.

В указанный период над этими проблемами работали многие математики и педагоги: Александров А.Д., Атанасян Л.С., Бескин Н.М., Бескин Л.Н., Бевз Г.П., Барыбин К.С., Болтянский В.Г., Вернер А.Л., Рыжик В.А., Нагибин Ф.Ф., Поташев В.В., Звавич Л.И., Клопский В.М., Куланин Е.Д., Погорелов А.В., Скопец З.А., Сосинский А.Б., Смирнова И.М., Смирнов В.А., Семенович А.Ф., Шарыгин И.Ф.,Черкасов Р.С., Ягодовский М.И., Яглом И.М. и многие другие!

В учебниках и задачниках по геометрии упомянутых авторов содержится огромный задачный материал по геометрии, который должен быть проанализирован и на базе которого должны организовываться и проводиться ЕГЭ по геометрии.

За последние годы появилось много новых учебников и задачников по геометрии как традиционных, так и выдвигающих новые идеи обучения геометрии в средней школе.

Мы начинаем с задачника по геометрии для 5–6 классов. Интерес к этому периоду обучения также возник из концепции А.Н. Колмогорова, которая предусматривала в этом возрасте изучение единого курса математики, где геометрическому материалу отводилось существенное место. Это привело к созданию пособий по геометрии для 5–6 классов.

Гусев В.А. [40,41]

Клековкин Г.А. [58]

Подходова Н.С. [71]

Панчищина В.А. [70]

Ходот Т.Г. и др. [73, 74]

Левитас Г.Г. [60]

До сих пор не удалось договориться, нужен ли отдельный курс геометрии в 5–6 классах, но совершенно ясно, что изучать геометрический материал в этом возрасте очень полезно и нужно. При изучении геометрического материала в 5–6 классах есть две основные тенденции.

а) Практически сложились основы содержания этого геометрического материала, которые отражены во всех перечисленных выше учебниках и задачниках.

б) На данный момент элементы пространственной геометрии вошли во все указанные пособия и все педагоги признают пользу изучения этих материалов.

2. Общим названием всех создаваемых нами задачников является — «Готовимся к ЕГЭ по геометрии». Как связан процесс создания наших задачников по геометрии с ЕГЭ, который активно внедряется в практику работы школы и вуза?

Здесь я хочу сформулировать свой взгляд на эти проблемы.

• Часто спрашивают: «Вы за ЕГЭ или против него?» Вопрос бессмысленный, так как мы тратим на изучение геометрии огромное время, усилия и средства, и не знать, к чему это приводит, глупо. Вот почему ЕГЭ нужен, но следует сделать его эффективным.

• Создавая серию задачников по геометрии, я понял, что очень трудно ответить на следующие вопросы: что значит проверять знания, умения и навыки по геометрии? Какие знания, умения и навыки следует проверять? Как подбирать задачи для этой проверки?

• Ответ на первый вопрос, казалось бы, очевиден, но в сложившейся практике мы проверяем только правильность ответа, а не ту деятельность, которую выполняет учащийся.

Похоже, что имеющиеся задачники в этом отношении мало что дают. В данном задачнике имеется много заданий, в которых проверяется общая стратегия деятельности, сама деятельность, варианты выполнения этой деятельности в решении задач.

• Ответ на второй вопрос вызвал существенные трудности. До создания этих задачников было понятно, что геометрического материала в школьных учебниках очень много. Выделить то, что следует проверять в первую очередь, достаточно трудно. Вместе с тем понятно, что «нельзя объять необъятное». Это в первую очередь касается проведения ЕГЭ, так как в нем участвуют все учащиеся и приходится оценивать успехи очень способных учащихся и тех, «кому не дано», и тех, которые не хотят усваивать весь этот большой и сложный курс. Для успешного проведения ЕГЭ прежде всего необходимо определить тот материал и те умения, которые следует проверять.

• Подбирать задачи для организации ЕГЭ можно достаточно эффективно, если располагать большим массивом задач. Вот с этой проблемой мы справляемся, так как в наших задачниках мы собираем все те задачи, которые использовались при изучении курса геометрии в течение многих десятилетий.

При этом мы решаем и очень простые задачи, и задачи повышенной трудности. Мы не даем рекомендаций подбора задач для ЕГЭ, а лишь предъявим массив задач, из которых ЕГЭ может быть составлен.

3. Перечислим некоторые особенности предлагаемого задачника.

Прежде всего задачи подобраны по шести основным видам, для каждого из которых имеются свои знаки. Охарактеризуем эти виды задач.

Задачи и вопросы, ответы на которые *учат делать выводы* (мы их называем «учись делать выводы»). С помощью этих задач можно проверить, усвоен основной теоретический материал или нет. Уметь решать такие задачи должен каждый ученик.

Эта группа задач формирует умения по использованию приема математической деятельности «синтез» и основ синтетической деятельности, которые лежат в основе всей математической деятельности учащихся.

Задачи для самоконтроля (мы их называем «ищи причину вывода»): решая их, нужно не только получить следствие из условия задачи, но и *выяснить причину появления этого следствия*. Задачи этой группы могут вызвать затруднения у некоторых учащихся.

Задачи этой группы формируют прием математической деятельности «анализ» и являются основой для овладения умениями аналитической деятельности, без которой невозможно представить успехи в математической деятельности учащихся.

Стандартные задачи — наиболее простые задачи; без умения их решать нельзя получить положительную оценку.

Математики к таким задачам относятся недостаточно внимательно, хотя ясно, что, не владея методикой решения задач этого уровня, бесполезно говорить об успехах в обучении математике. Помимо этого ясно и то, что нельзя сводить весь процесс обучения математике к решению таких стандартных задач.

Учебные задачи — самая многочисленная группа задач, которые придется решать в классе и дома. Эти задачи позволяют усвоить материал учебника и перейти к решению более сложных геометрических задач.

Уровень сложности этих задач разный, он колеблется от стандартных задач до творческих. Это в основном те задачи, с помощью которых оценивается степень успешности учащихся в обучении. В наших задачниках мы пытаемся построить эти учебные задачи по степени возрастания их сложности, но эта систематизация должна быть продолжена, т.к. именно эти задачи составляют основу Единого государственного экзамена.

Творческие задачи: к ним относятся задачи, которые не удается решить стандартными методами; для их решения нужно выдвинуть некоторую новую идею.

Эти задачи решаются с использованием приема мыслительной деятельности «анализ через синтез», который И. Пааже назвал «квинтэссенцией мышления».

Исследовательские задания. Для своего решения они требуют значительных усилий. Такие задания не могут полностью решаться в классе, они предполагают работу дома, возможно, даже не одного, а нескольких учеников.

Многие из предложенных исследовательских заданий составлены на основе статей, помещенных в журнале «Квант», но материал этих заданий пересмотрен и сделан более доступным для учащихся.

В первых четырех видах задач: «учись делать выводы», «ищи причину вывода», «стандартные задачи» и «учебные задачи», как правило, не содержатся задачи, при решении которых используются методы, которые могут появиться гораздо позднее в процессе изучения курса геометрии.

В «творческих задачах» и в «исследовательских задачах» могут появляться методы и факты, которые учащимся придется изучать дополнительно, но эти моменты всегда отдельно оговариваются.

В настоящее время существует достаточно много различных учебников и задачников, где встречаются разнообразные трактовки тех или иных геометрических понятий и различные обозначения. В связи с этим в начале каждого раздела помещены два пункта:

Основное теоретическое содержание. Здесь приводится минимальная теоретическая информация, необходимая для решения предлагаемых задач.

Термины и обозначения. Здесь указаны используемая в задачнике терминология и минимальный список обозначений.

Задачи в задачнике имеют двойную нумерацию. Запись задачи 5.16 означает, что это 16-я задача из пятой главы.

Рисунки в задачнике также имеют двойную нумерацию (в том числе рисунки, включенные в ответы): первая цифра указывает номер главы, вторая — порядковый номер рисунка. Например, рис. 6.15 — это 15-й рисунок в главе 6. Номера рисунков в ответах продолжают нумерацию рисунков к текстам задач.

Глава 1
СВОЙСТВА НЕОПРЕДЕЛЯЕМЫХ ГЕОМЕТРИЧЕСКИХ ПОНЯТИЙ

1.1. ПОНЯТИЕ ПЛОСКОСТИ

Основное теоретическое содержание

Плоскость — неопределяемое понятие геометрии. В пространстве существует бесконечное множество плоскостей.

Мы изображаем только часть плоскости. Плоскость продолжается в пространстве без границ. Представление о плоскости, вернее о ее части, можно получить наблюдая поверхность моря при полном штиле.

а) *б)*

Рис. 1.1

Термины и обозначения

Плоскости изображают в пространстве или в виде параллелограмма, или произвольными плоскими фигурами (рис. 1.1).

Плоскости обозначают строчными греческими буквами: α, β, γ и т.д.

Задачи

1.1. На рисунке 1.2 изображен куб. «Кусочки плоскостей», которыми куб покрыт со всех сторон, называются гранями куба. Назовите грани этого куба. Сколько граней имеет куб?

1.2. Шестигранный неотточенный карандаш так же, как и куб, покрыт со всех сторон гранями. Сколько граней имеет неотточенный шестигранный карандаш?

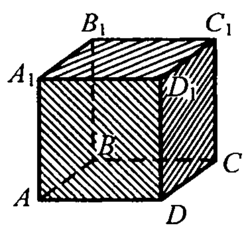


Рис. 1.2

1.3. Возьмите глобус, мысленно проведите плоскость через экватор. Назовите столицы стран, расположенных в Северном и Южном полушариях.

1.4. В пространстве имеется плоскость. На сколько частей эта плоскость разобьет пространство?

1.5. Что можно сказать об утверждении: «Крышка стола есть плоскость»?

1.6. Могут ли Москва и Санкт-Петербург располагаться в разных полупространствах, определенных некоторой плоскостью, пересекающей Земной шар?

1.7. Имеется куб. Ответьте на вопросы:

1. Как провести плоскость, чтобы куб лежал в одном полупространстве, задаваемом этой плоскостью?

2. Как провести плоскость, чтобы в каждом полупространстве, задаваемом этой плоскостью, лежало: а) только по одной грани куба; б) по две грани; в) по три грани?

1.8. Постройте произвольную плоскость. Как она будет выглядеть?

1.9. Постройте плоскость α.

1. Изобразите несколько фигур, лежащих в этой плоскости.

2. Существуют ли фигуры, не лежащие в этой плоскости? Изобразите несколько таких фигур.

1.10. Рассмотрите различные предметы домашнего обихода. Определите, какие части поверхностей каждого из этих предметов являются плоскими и какие не являются.

1.11. Проведите соревнование: кто приведет наибольшее количество примеров плоских и неплоских поверхностей.

1.12. На рисунке 1.3 изображены различные геометрические фигуры. Заштрихуйте плоские части поверхностей этих фигур.

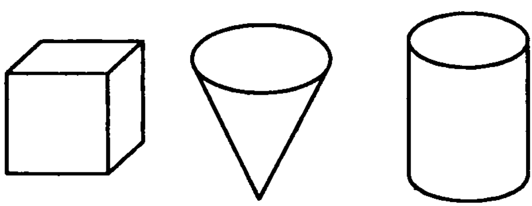
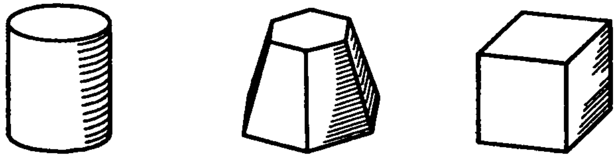


Рис. 1.3

1.13. Рассмотрите фигуры, изображенные на рисунке 1.4. Чем они отличаются друг от друга? Определите, какая из этих фигур лишняя?

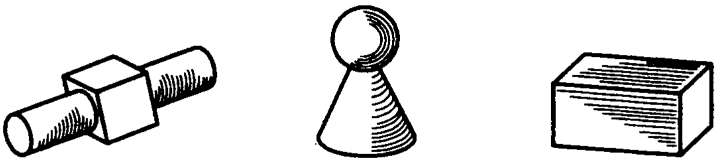


а) б) в)

Рис. 1.4

1.14. Проделайте эту же работу для фигур, изображенных на рисунке 1.5.

1.15. Возьмите мяч и отметьте мелом на его поверхности две точки. Проведите через них линию. Сколько линий можно провести через эти две точки? Может ли линия, нарисованная на поверхности мяча, оказаться плоской?



а) б) в)

Рис. 1.5

1.16. Пусть фигура состоит из двух (трех, четырех) точек. Существует ли плоскость, разделяющая точки этих фигур так, чтобы с каждой стороны от плоскости находилось одинаковое число точек?

1.2. РАСПОЛОЖЕНИЕ ТОЧЕК

Основное теоретическое содержание

Все геометрические фигуры состоят из точек. Понятие точки мы не определяем, оно является неопределяемым понятием. Точки могут произвольно располагаться в пространстве.

В этом разделе будут присутствовать различные фигуры: плоскости, пространство, куб, но главное внимание уделяется расположению точек.

Термины и обозначения

Точки обозначаются заглавными латинскими буквами A, B, C, D, M, N...

Задачи

1.17. Где по отношению к поверхности куба находятся точки A, B, C, D (рис. 1.6).

1.18. Дан шар. Внутри него и снаружи частицы воздуха — точки. Как можно отличать друг от друга внутренние и внешние частицы воздуха — точки?

1.19. У нас имеется куб. Как можно описать свойства точек, являющихся внутренними по отношению к поверхности куба; как можно описать свойства точек, лежащих вне поверхности куба; как можно описать свойства точек, принадлежащих поверхности куба?

1.20. На рисунке 1.7 изображена окружность с центром в точке O и круг, ограниченный этой окружностью. 1). Принадлежит ли окружности ее центр? 2) Принадлежит ли центр окружности кругу, ограниченному данной окружностью?

1.21. На рисунке 1.8 изображена сфера с центром в точке O и ограниченный ею шар. Принадлежит ли центр сферы: 1) сфере? 2) шару, ограниченному данной сферой?

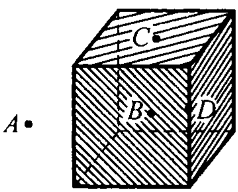


Рис. 1.6

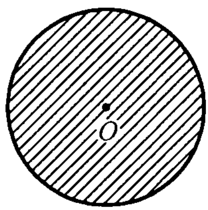


Рис. 1.7

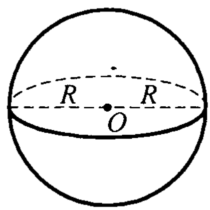


Рис. 1.8

1.22. Пусть нам дано десять точек. Попробуйте на листе бумаги расположить эти точки по-разному. Как это можно сделать? Как это можно сделать красиво? Посоревнуйтесь, кто предложит большее число вариантов расположения точек.

1.23. Нам даны три точки на плоскости. Как они могут быть расположены на этой плоскости?

1.24. Как могут располагаться 4 точки в пространстве?

1.25. Как могут располагаться 5 точек в пространстве?

1.26. Расставьте в комнате:

а) 7 стульев так, чтобы у каждой из четырех стен комнаты стояло по 2 стула;

б) 9 стульев так, чтобы у каждой из четырех стен комнаты стояло по 3 стула.

в) 10 стульев так, чтобы у каждой стены комнаты стояло по три стула.

г) 12 стульев в комнате так, чтобы:

1) в двух рядах было по четыре стула, а в одном шесть;

2) у каждой из четырех стен было по четыре стула;

3) два стула стояли посередине комнаты, а остальные — вдоль четырех стен поровну.

д) 16 стульев, чтобы у каждой из четырех стен комнаты стояло: 1) по 4 стула; 2) по 5 стульев?

1.27. Постройте фигуру в пространстве (многогранник), у которой 8 вершин.

1.3. ПОНЯТИЕ ПРЯМОЙ. АКСИОМА ПРЯМОЙ

Основное теоретическое содержание

Пусть нам даны две точки A и B (рис. 1.9, *а*). Проведем через точки A и B прямую (рис. 1.9, *б*). У нас появляется еще одно важное понятие геометрии — *прямая*, которая также состоит из точек. Изобразить прямую целиком невозможно, мы лишь условно изображаем ее часть.

Рис. 1.9

Прямая — неопределяемое понятие геометрии.

А к с и о м а 1 (аксиома прямой). *Через любые две точки можно провести прямую, и только одну.*

Термины и обозначения

Прямые обозначаются строчными латинскими буквами: *a, b, c, d, m, n, p* и т.д. или двумя заглавными буквами, соответствующими точкам, лежащим на ней. Например, AB.

Если в условии задачи сказано «две точки» или «две прямые», то имеется в виду, что они различные.

В геометрии применяют некоторые удобные знаки, которые широко используются в математике и относятся к так называемой теории множеств.

Знак принадлежности «$\in$». Запись $C \in p$ читается так: «точка C принадлежит прямой p».

Знак непринадлежности «$\notin$». Запись $D \notin p$ читается так: «точка D не принадлежит прямой p».

Задачи

1.28. Дана прямая. Сколько точек содержит эта прямая?

1.29. Посмотрите на рисунок 1.10 и ответьте на вопросы:

1. Через какие точки проходят прямые a, b и с?
2. Какие точки лежат на прямой b?
3. Какие точки не лежат на прямой с?

1.30. Какие из вершин куба (рис. 1.11) принадлежат прямым a, b, c, d?

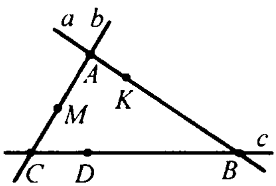


Рис. 1.10

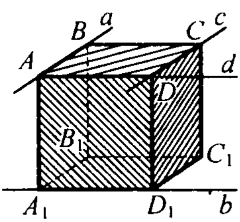


Рис. 1.11

1.31. Мы хотим провести прямую. Сколько точек для этого нужно иметь?

1.32. В пространстве дана точка. Проведите через эту точку прямую. Сколько можно провести прямых через данную точку? Если проведены 5 прямых, то какую фигуру мы при этом получим: плоскую или пространственную?

1.33. На плоскости отмечены 2 точки. Сколько прямых можно провести через эти точки? Проведите эти прямые.

1.34. Пусть нам даны три точки. Проведите через них прямые. Сколько прямых при этом получится?

1.35. Мы хотим на плоскости построить три прямые. Сколько для этого на плоскости нужно отметить точек?

1.36. Перечертите рисунок 1.12 в тетрадь. С помощью линейки проведите все прямые, проходящие через пары этих точек. Сколько прямых вам удалось провести?

1.37. Пусть нам даны четыре точки. Как они могут быть расположены? Сколько прямых можно провести через эти точки?

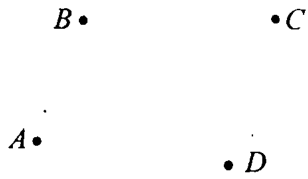


Рис. 1.12

1.38. На листе бумаги отметьте пять точек и проведите всевозможные прямые, каждая из которых проходит через какие-либо две из этих точек. Как расположить точки, чтобы оказались проведенными: а) 5 прямых; б) 6 прямых?

1.39. Сколько различных прямых определяют все пары вершин куба?

1.40. Сколько различных прямых определяют все пары точек, взятых из шести данных точек?

1.41. Точки A, B и C лежат на прямой a. Есть ли среди прямых AB, AC и BC различные? Объясните ответ.

1.42. Дано: P и O — различные точки. Прямая l_1 содержит обе точки P и O, прямая l_2 также содержит обе точки P и O. Что можно сказать о прямых l_1 и l_2? Обоснуйте ваш вывод.

1.43. Дано: l_1 и l_2 — различные прямые. Точка P принадлежит и l_1, и l_2. Точка O также принадлежит и l_1, и l_2. Что можно сказать о точках P и O? Обоснуйте ваш вывод.

1.4. ВЗАИМНОЕ РАСПОЛОЖЕНИЕ ПРЯМЫХ

1.4.1. Пересекающиеся прямые

Основное теоретическое содержание

ОПРЕДЕЛЕНИЕ. *Если две прямые имеют только одну общую точку, то они называются пересекающимися.*

Термины и обозначения

Текст «прямые a и b пересекаются в точке O» можно записать так: $a \cap b = O$.

Задачи

1.44. Дополните следующие утверждения:

1. Две различные прямые могут пересекаться лишь в ... .
2. У двух пересекающихся прямых может быть ... .

3. В каждой вершине куба пересекаются ... .

4. Через одну точку можно провести ... .

5. В каждой вершине треугольной пирамиды пересекаются ... .

1.45. Сколько прямых, содержащих ребра прямоугольного параллелепипеда, пересекаются в его вершинах?

1.46. Известно, что прямые a и b пересекаются. Сколько общих точек имеют эти прямые? Изобразите в тетради пересекающиеся прямые.

1.47. Могут ли две пересекающиеся прямые лежать в разных плоскостях?

1.48. Могут ли через две точки проходить различные пересекающиеся прямые?

1.49. Что нужно знать, чтобы утверждать, что прямые пересекаются?

1.50. На рисунке 1.13 изображен куб $ABCDA_1B_1C_1D_1$. Назовите пары пересекающихся прямых, содержащих ребра куба.

1.51. На рисунке 1.14 изображена треугольная пирамида. Назовите прямые, содержащие ребра треугольной пирамиды, пересекающиеся в одной точке.

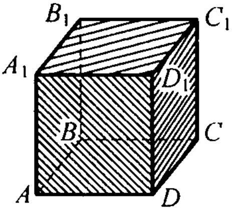


Рис. 1.13

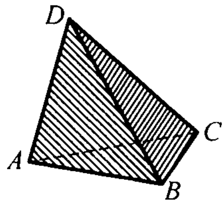


Рис. 1.14

1.52. Прямая AB пересекает прямую AC в точке A, а прямую BC — в точке B. Принадлежит ли точка C прямой AB? Сделайте рисунок.

1.53. Дана прямая a. Постройте такие точки A, B, C, чтобы прямые AB и a пересекались в точке C, лежащей между точками A и B.

1.54. Начертите три прямые AB, BC, AC. На сколько частей разбивается этими прямыми плоскость?

1.55. Даны a_1 и a_2 — различные прямые. Точка P принадлежит a_1 и a_2. Точка O также принадлежит a_1 и a_2. Что можно сказать о точках P и O? Какая аксиома или теорема подтверждает ваше заключение?

1.56. Можно ли на плоскости начертить три прямые, чтобы число их точек пересечения было равно: 0; 1; 2; 3?

Выполните соответствующие рисунки.

1.57. Можно ли на плоскости начертить такие четыре прямые, чтобы число их точек пересечения было равно: 7; 6; 5; 4; 3; 2; 1; 0?

1.58. Можно ли расположить на плоскости пять точек так, что если через каждые две провести прямую, то получится: 1; 2; 3; 4; ... ; 11 прямых?

1.4.2. Параллельные и скрещивающиеся прямые

Основное теоретическое содержание

Кроме пересекающихся прямых есть и другие случаи взаимного расположения прямых. Две прямые могут не иметь общих точек и лежать в одной плоскости. Эти прямые называются *параллельными прямыми.*

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 1. *Прямые a и b называются параллельными, если они лежат в одной плоскости и не имеют общих точек.*

Есть прямые, которые не имеют общих точек и не лежат в одной плоскости. Эти прямые называются скрещивающимися.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 2. *Прямые, не лежащие в одной плоскости, называются скрещивающимися.*

Термины и обозначения

Параллельность прямых обозначается знаком «$\parallel$». Запись «$a \parallel b$» читается: прямые a и b параллельны.

Скрещивающиеся прямые обозначаются знаком «$\overset{\bullet}{—}$». «$a \overset{\bullet}{—} b$» читается: прямые a и b скрещивающиеся.

Задачи

1.59. Даны две параллельные прямые. Какими свойствами они обладают?

1.60. Даны две скрещивающиеся прямые a и b. Какими свойствами они обладают?

1.61. Заполните пропуски в следующих предложениях так, чтобы в результате получились истинные утверждения:

1. Если две прямые в пространстве не имеют общих точек, то они ... .

2. Если две прямые не принадлежат одной плоскости, то ... .

3. Если $ABCD$ — квадрат, то прямые AB и CD... .

4. Дан куб $ABCDA_1B_1C_1D_1$ (рис. 1.15). Прямая ... скрещивается с прямой AA_1, прямые AB и CC_1 ... , так как ... .

1.62. Что нужно знать о двух прямых, чтобы утверждать, что они параллельны?

1.63. На рисунке 1.16 изображен токарный резец. Его кромки — отрезки некоторых прямых. Какие различные виды расположения прямых вы видите на изображении этого резца?

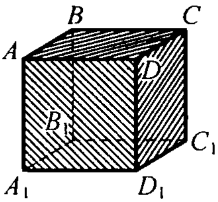


Рис. 1.15

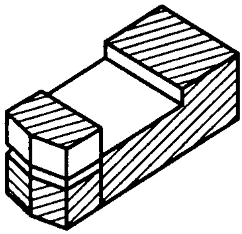


Рис. 1.16

1.64. Верно ли, что две любые прямые в пространстве либо параллельны, либо пересекаются?

1.65. Могут ли прямые, содержащие ребра треугольной пирамиды, быть: а) параллельными; б) скрещивающимися?

1.66. Могут ли в одной грани прямоугольного параллелепипеда находиться отрезки скрещивающихся прямых?

1.67. Изучите изображенную на рисунке 1.17 пространственную фигуру (точки A, B, C, D лежат в одной плоскости) и ответьте на вопросы:

1. Принадлежат ли одной прямой точки E, D и F?
2. Принадлежат ли одной плоскости точки E, C, B и F?
3. Пересекаются ли отрезки AC и BD?
4. Пересекаются ли отрезки AC и DF?
5. Принадлежат ли одной плоскости точки E, B и F?
6. Принадлежат ли одной плоскости точки F, B, G и D?

1.68. Установите, верны ли высказывания:

1. Если две прямые в пространстве не имеют общей точки, то они параллельны.

2. Если прямые a и b — скрещивающиеся и прямые a и c — скрещивающиеся, то прямые b и c — тоже скрещивающиеся.

С **1.69.** Известно, что прямые a и b параллельны. Сколько общих точек имеют эти прямые? Изобразите эти прямые.

1.70. На листе бумаги изображена прямая a. Проведите прямую b, пересекающую прямую a и прямую c, параллельную прямой a.

1.71. Перечислите все ребра куба (рис. 1.15), для которых содержащие их прямые являются скрещивающимися с прямой BB_1.

1.72. Через данную точку проведите прямую, скрещивающуюся с данной прямой.

1.73. Дан куб $ABCDA_1B_1C_1D_1$ (рис. 1.15). Сколько прямых, проходящих через две вершины куба: а) пересекается с ребром AB; б) параллельны ребру AB?

1.74. Дан куб $ABCDA_1B_1C_1D_1$ (рис. 1.15). Какие ребра этого куба лежат на прямых, которые скрещиваются: а) с прямой AD; б) с прямыми AD и DD_1?

1.75. В кубе $KLMNK_1L_1M_1N_1$ проведена диагональ KM_1 (рис. 1.18). Сколько прямых, скрещивающихся с прямой KM_1, проходит через какие-либо две вершины куба?

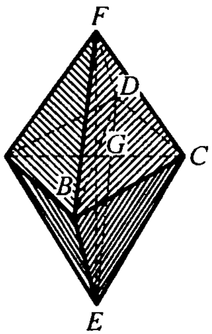


Рис. 1.17

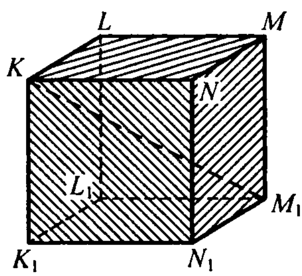


Рис. 1.18

1.76. Нарисуйте квадрат $ABCD$. Назовите пары прямых, содержащих стороны квадрата, являющиеся параллельными.

1.77. Нарисуйте треугольник ABC. Есть ли на рисунке пары прямых, содержащих стороны треугольника, являющиеся параллельными прямыми.

1.78. На рисунке 1.15 изображен куб. Докажите, что прямая AB скрещивается с прямыми A_1D_1, B_1C_1, A_1D, B_1C, DC_1, D_1C.

1.79. Приведите пример трех прямых, каждые две из которых скрещиваются. Сколько можно построить прямых, каждые две из которых будут скрещиваться?

1.80. Существуют ли две параллельные прямые, каждая из которых пересекает две данные скрещивающиеся прямые?

1.81. Даны три точки A, B, C, не лежащие на одной прямой. Где лежат все точки D такие, что прямые AB и CD скрещиваются?

1.82. Прямые a и b параллельны. Прямая a скрещивается с прямой c. Что можно сказать о взаимном расположении прямых b и c?

1.83. Прямые a и b пересекаются. Прямая a скрещивается с прямой c. Что можно сказать о взаимном расположении прямых b и c?

1.84. Даны две скрещивающиеся прямые a и b и точка A, не лежащая на этих прямых. Докажите, что существует не более одной прямой, проходящей через точку A и пересекающей обе данные прямые.

1.5. ТОЧКИ И ПРЯМЫЕ

Во всех предыдущих разделах говорилось о взаимном расположении точек и прямых, рассмотренные разделы не содержат сложных задач и являются теоретическим фундаментом для изучения различных вопросов геометрии. В этом разделе мы уже будем решать довольно сложные задачи, которые, в основном, можно рекомендовать для учащихся, проявляющих способности к изучению математики.

1.5.1. Учебные задачи на взаимное расположение точек и прямых

Решим еще несколько учебных задач на расположение точек и прямых, которые будут нужны для дальнейшего изучения курса геометрии.

1.85. Прочитайте следующие записи: $A \notin a$; $B \in b$; $C \notin m$; $K \in c$.

1.86. Посмотрите на рисунок 1.19 и ответьте на вопросы:

1. Какие точки принадлежат прямым a и b?
2. Какие точки не принадлежат этим прямым?
3. Какие точки принадлежат и прямой a, и прямой b?

1.87. Есть прямая и точка. Как они могут быть расположены?

1.88. Как могут быть расположены прямая и две точки?

1.89. Вытяните руку перед собой. Рассмотрите точку A, совпадающую с кончиком вашего указательного пальца, и точку B, совпадающую с правым верхним углом вашей комнаты. Сколько прямых одновременно проходит через обе точки A и B? Какая аксиома подтверждает ваш ответ?

1.90. Начертите прямую a и отметьте:

а) точки A и B, лежащие на прямой a; б) точки P, Q и R, не лежащие на прямой a.

Запишите с помощью знаков взаимное расположение точек A, B, P, Q, R и прямой a.

1.91. Перечертите в тетрадь рисунок 1.20 и обозначьте буквами все прямые и точки их пересечения. Запишите с помощью знаков взаимное расположение точек и прямых.

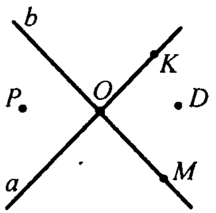


Рис. 1.19

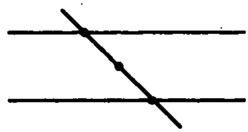


Рис. 1.20

1.92. На полу классной комнаты отметьте мелом точку A.

1. Сколько прямых задают эта точка A и точки, являющиеся вершинами углов в классной комнате? Сделайте чертежи, обозначьте вершины углов класса и выпишите все получившиеся прямые.

2. Представьте себе, что на каждой стене класса отмечена точка. Сколько таких точек отмечено? Мысленно соедините эти точки прямыми. Сколько образовалось прямых?

3. Сколько получится прямых, если добавить к точкам на стенах класса точку A, отмеченную на полу классной комнаты?

1.93. 1). На плоскости имеется прямая a и три точки A, B, C. Как могут быть расположены данные точки по отношению к данной прямой?

2). Имеется прямая a и четыре точки A, B, C и D. Каково может быть взаимное расположение этих объектов по отношению друг к другу?

1.94. На плоскости даны четыре прямые. Как они могут быть расположены? Сколько точек пересечения могут иметь эти прямые?

1.5.2. Более сложные задачи на взаимное расположение точек и прямых

1.95. Как расположить 6 монет так, чтобы получилось 3 ряда по 3 монеты и 6 рядов по 2 монеты?

1.96. Расположите на столе 9 пуговиц в форме квадрата по 3 пуговицы на каждой стороне и одну в центре (рис. 1.21).

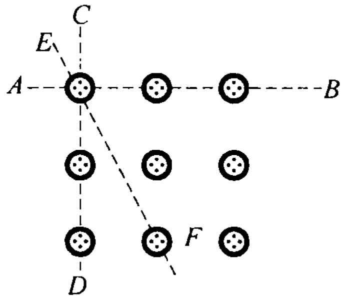


Рис. 1.21

Заметьте, что если вдоль какой-нибудь прямой линии располагаются две пуговицы или более, то такое расположение мы всегда будем называть «рядом». Так, *AB* и *CD* — ряды, в каждом из которых по 3 пуговицы, а *EF* — ряд, содержащий две пуговицы (рис. 1.21).

Определите, сколько на рисунке 1.21 всего рядов по 2 пуговицы в каждом.

1.97. Расположите 12 монет по 5 монет в каждом ряду.

1.98. Разместите 25 деревьев в 12 рядов по 5 деревьев в каждом ряду.

1.5.3. Трехточечники

В предыдущем разделе мы решили несколько задач на расположение точек и прямых, при решении которых следовало проявить интуицию и смекалку. Каждая задача рассматривалась сама по себе, и для ее решения следовало выдвигать какую-то нестандартную идею или идеи. Следующая серия задач уже соединяет проблемы, которые реализуются в различных частных случаях и представляют собой яркое исследовательское задание «*Трехточечники*».

Это некоторая целостная проблема, соединенная общей идеей. Эта проблема относится к разделу математики, называемому комбинаторной геометрией. В предлагаемом задании рассматривается общая проблема, которая реализуется в различных частных случаях: *Дано целое положительное число p. Как расположить на плоскости точки ($p > 3$), чтобы никакие четыре из них не принадлежали одной прямой и чтобы было максимальное число прямых, проходящих через три из имеющихся точек каждая?*

Рассмотрим решения задач этого проблемного задания, которые могут быть предложены не только на уроках геометрии, но и во всевозможных формах углубленного обучения математики.

Во всех предложенных в этом проблемном задании задачах мы имеем дело с так называемыми «*трехточечными прямыми*», то есть с прямыми содержащими каждая по три из заданных точек, и через каждую заданную точку проходит тоже по три прямых.

Задачи

1.99. (5 точек и 2 прямые) Как расположить 5 точек и 2 прямые, чтобы на каждой прямой было по 3 точки?

1.100. (6 точек и 4 прямые) Можно ли 6 деревьев посадить в 4 ряда так, чтобы в каждом ряду было по 3 дерева?

1.101. (7 точек и 5 прямых) Можно ли 7 точек расположить на 5 прямых так, чтобы на каждой прямой было по три точки?

1.102. (7 точек и 6 прямых) Можно ли 7 тюльпанов посадить так, чтобы образовалось 6 рядов по 3 тюльпана в каждом?

1.103. (7 точек и 7 прямых) Докажите, что семь прямых и семь точек нельзя расположить на плоскости так, чтобы через каждую точку проходило три прямых и на каждой прямой лежало три точки.

1.104. (8 точек и 7 прямых) Можно ли 8 точек расположить на 7 прямых так, чтобы на каждой прямой лежали только три точки?

1.105. (9 точек и 8 прямых) Как расположить 9 точек на восьми прямых так, чтобы на каждой прямой было по 3 точки?

1.106. (9 точек и 9 прямых) (конфигурация Паскаля). Как расположить 9 точек, которые лежат по 3 на девяти прямых, причем через каждую точку проходит по 3 данных прямых?

1.107. (9 точек и 10 прямых) Стефан Барр в книге «Математический цветник» сформулировал такую задачу:

Задача простая: деревья в саду.
Девять деревьев по три в ряду.
Их посадить нужно в десять рядов.
Задача простая ... Ответ ваш готов?

1.108. (10 точек и 10 прямых) (конфигурация Дезарга). Как расположить десять точек, которые лежат по три на десяти прямых.

1.109. (10 точек и 12 прямых) Как расположить 10 точек на 12 прямых так, чтобы на каждой прямой лежало по 3 точки?

1.110. (11 точек и 16 прямых) Можно ли 11 точек расположить на 16 прямых так, чтобы на каждой прямой лежали только три точки?

1.111. (13 точек и 12 прямых) Рассадите 13 декоративных кустов в 12 рядов по 3 куста в каждом ряду.

1.5.4. Четырехточечники

Теперь решим несколько задач на «четырехточечники».

Общая постановка проблем останется такой же, как и в предыдущем разделе «Трехточечники». Надо расположить точки на прямых так, чтобы на каждой прямой было по четыре точки.

Задачи

1.112. В древности один правитель захотел построить 10 замков, соединенных между собой стенами; стены должны тянуться пятью прямыми линиями, с 4 замками на каждой линии.

Приглашенный строитель представил план, который вы видите на рис. 1.22.

Но правитель остался недоволен этим планом: ведь при таком расположении можно подойти извне к любому замку, а ему хотелось, чтобы если не все, то хоть один или два замка были защищены стеной от вторжения извне. Строитель возразил, что нельзя удовлетворить этому условию, раз 10 замков должны быть расположены по 4 на каждой из 5 стен. Но правитель настаивал на своем.

Долго ломал строитель голову над этой задачей и, наконец, разрешил ее.

Может быть, и вам посчастливится найти такое расположение 10 замков и 5 соединяющих их прямых стен, чтобы требуемое условие было удовлетворено?

1.113. Расположите на столе 10 шашек в 2 ряда по 5 штук, как показано на рис. 1.23.

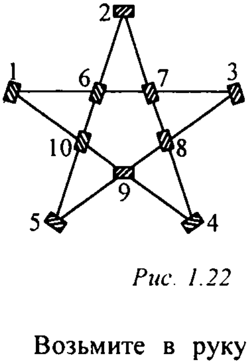


Рис. 1.22

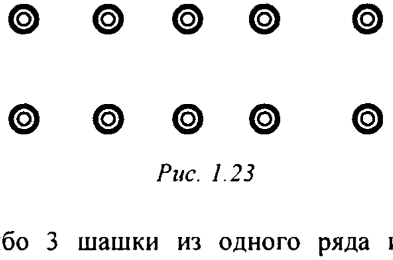


Рис. 1.23

Возьмите в руку какие-либо 3 шашки из одного ряда и 1 шашку из другого. Разместите их на плоскости стола (не сдвигая с мест остальные шашки и не накладывая одну шашку на другую) так, чтобы образовалось пять прямолинейных рядов по 4 шашки в каждом ряду[1].

1.114. Как расположить 12 монет в 6 рядов, по 4 монеты в каждом ряду?

1.115. Для изготовления праздничной иллюминации нужно было красиво разместить 10 лампочек в 5 рядов по 4 лампочки в каждом ряду. Как это можно сделать?

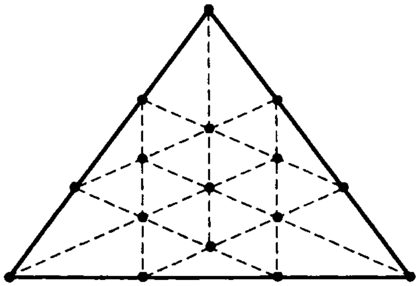


Рис. 1.24

1.116. На треугольной площадке (рис. 1.24) садовник вырастил 16 роз, расположенных в 12 прямолинейных рядов по 4 розы в каждом ряду. Потом он приготовил клумбу и пересадил туда все 16 роз в 15 рядов по 4 розы в каждом. Как он это сделал?

1.6. ВЗАИМНОЕ РАСПОЛОЖЕНИЕ ТОЧЕК И ПЛОСКОСТЕЙ. АКСИОМА ПЛОСКОСТИ

Основное теоретическое содержание

Точки могут лежать в плоскости и не лежать в ней.

Вне данной плоскости может находиться бесчисленное множество точек.

Наши наблюдения приводят нас к еще одной аксиоме геометрии — *аксиоме плоскости.*

А к с и о м а 2 (аксиома плоскости). *Через три точки, не лежащие на одной прямой, проходит одна, и только одна, плоскость.*

Итак, если есть три точки, не лежащие на одной прямой, то есть единственная плоскость, проходящая через эти три точки.

---

[1] Эта задача взята нами из книги Б.А. Кордемского «Математическая смекалка».

Термины и обозначения

Если точка A принадлежит плоскости α, то это можно записать так « $A \in \alpha$ ». Если точка B не принадлежит плоскости β, то это можно записать так: « $B \notin \beta$ ». Если «прямая a принадлежит плоскости α, то это можно записать так « $a \subset \alpha$ ». Если прямая p не принадлежит плоскости β, то это можно записать так: « $p \not\subset \beta$ ».

Задачи

1.117. Посмотрите на рисунок 1.25. Назовите точки, принадлежащие плоскости α, и точки, ей не принадлежащие.

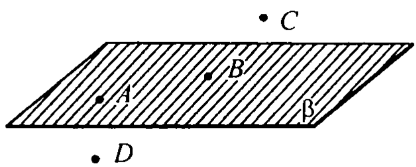


Рис. 1.25

1.118. Какие из вершин куба, изображенного на рисунке 1.26, принадлежат граням α, β, γ этого куба?

1.119. Мы знаем, что плоскость содержит бесчисленное множество точек. Существуют ли точки, не принадлежащие данной плоскости? Если да, то сколько таких точек существует?

1.120. На рисунке 1.27 изображен куб $ABCDA_1B_1C_1D_1$

1) В какой из граней не лежит точка A?
2) В какой грани лежит точка C?
3) В какой грани лежит точка M?
4) В какой грани не лежит точка M?

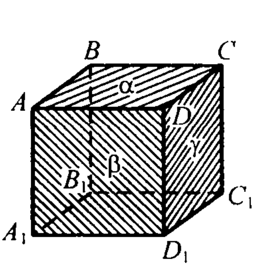


Рис. 1.26

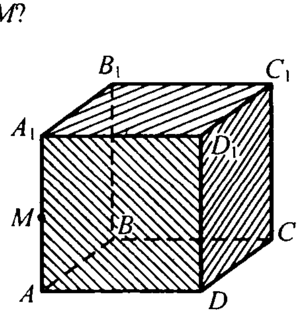


Рис. 1.27

1.121. Какое минимальное число точек необходимо для определения плоскости? Всегда ли три точки полностью определяют некоторую плоскость?

1.122. Перечислите различные условия, которые определяют плоскость.

1.123. Сколько существует плоскостей, содержащих две данные точки?

1.124. Почему у штативов фотоаппаратов, геодезических приборов по три опорные ножки? Почему стол, имеющий четыре ножки, не всегда устойчив?

1.125. Предположим, что вершина любого угла вашего письменного стола обозначена через P, выключатель на стене — через K и вершина одного из углов комнаты — через C. Существует ли плоскость, содержащая точки P, K и C?

Ваш вывод обоснуйте.

1.126. В пространстве есть точка. Можно ли через нее провести плоскость? Сколько плоскостей можно провести через эту точку? Постройте рисунок.

1.127. Дана плоскость α и две точки A и B. Как могут быть расположены эти точки по отношению к плоскости?

1.128. Даны плоскость a и квадрат $ABCD$. Может ли плоскости a принадлежать: а) только одна вершина квадрата; б) только две вершины квадрата; в) только три вершины квадрата?

1.129. Два ученика играют, поочередно отмечая какую-либо вершину куба. Первый игрок стремится к тому, чтобы какие-нибудь три последовательно отмеченные вершины лежали в одной грани, а второй старается не допустить этого. Докажите, что при правильной игре второй всегда может выиграть.

1.130. В пространстве есть четыре точки. Можно ли через них провести плоскость? Сколько плоскостей можно провести через три точки?

1.7. ВЗАИМНОЕ РАСПОЛОЖЕНИЕ ПРЯМЫХ И ПЛОСКОСТЕЙ. АКСИОМЫ ПРЯМОЙ И ПЛОСКОСТИ

Основное теоретическое содержание

ОПРЕДЕЛЕНИЕ. *Если прямая и плоскость имеют только одну общую точку, то они называются пересекающимися.*

Аксиома (аксиома прямой и плоскости) *Прямая, проходящая через две точки плоскости, принадлежит этой плоскости.*

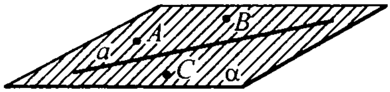
Проведем на плоскости α прямую a и отметим на плоскости несколько точек, не принадлежащих этой прямой (рис. 1.28, *а*).

Точки A и C лежат по разные стороны от прямой a, они разделены этой прямой. Точки A и B не разделены прямой a, они лежат по одну сторону от прямой a.

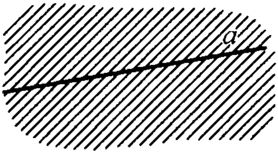
Прямая a разбила плоскость на две части — два множества точек, лежащих по разные стороны от прямой a (рис. 1.28, *б*). Прямая a вместе с одним из образовавшихся множеств называется *полуплоскостью*. Прямая a называется *границей полуплоскости.*

Можно сформулировать следующее свойство плоскости:

Любая прямая, лежащая в плоскости, разбивает эту плоскость на две полуплоскости.



а)



б)

Рис. 1.28

Задачи

1.131. Прямая лежит на плоскости. Какими свойствами обладает прямая?

1.132. На рисунке 1.29 изображен куб $ABCDA_1B_1C_1D_1$. Ответьте на следующие вопросы:

1. В какой из граней не лежит точка A?
2. В какой грани лежит точка C_1?
3. Каким плоскостям принадлежит точка D?
4. Какой грани принадлежит прямая AD_1?
5. Какой грани принадлежит прямая D_1C?
6. Какие прямые не лежат в грани ABB_1A_1?

1.133. На рисунке 1.30 прямая a пересекает квадрат $ABCD$. Назовите вершины квадрата, лежащие: а) в одной полуплоскости; б) в разных полуплоскостях, определенных этой прямой.

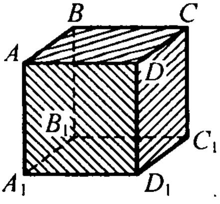


Рис. 1.29

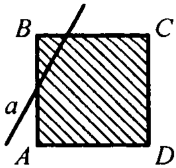


Рис. 1.30

1.134. Определите, какое из следующих утверждений верно (объясните ваш вывод):

1. Если 3 точки лежат на одной прямой, то они лежат в одной плоскости.

2. Если 3 точки лежат в одной плоскости, то они лежат на одной прямой.

1.135. Что нужно знать о прямой *a*, чтобы утверждать, что она лежит в плоскости α?

1.136. Две точки *M* и *K*, принадлежащие прямой *AB*, лежат в плоскости α. Лежит ли прямая *AB* в плоскости α? Почему?

1.137. Каким может быть взаимное расположение прямой и плоскости?

1.138. Укажите, верны или ошибочны следующие утверждения:

1. Пространство содержит по крайней мере четыре точки.
2. Каждая полуплоскость имеет свою границу.
3. Прямая разбивает плоскость на два множества.
4. Любые две полуплоскости лежат в одной плоскости.

1.139. Каким общим свойством обладают точки одной полуплоскости?

1.140. Две вершины *A* и *B* треугольника *ABC* принадлежат плоскости α? Можно ли утверждать, что сторона *AB* треугольника *ABC* лежит в плоскости α?

1.141. Три вершины треугольника *ABC* принадлежат плоскости α. Можно ли утверждать, что треугольник *ABC* лежит в плоскости α?

1.142. Найдите в окружающих предметах примеры: *а*) прямой, которая имеет с плоскостью единственную общую точку; *б*) прямой, не имеющей общих точек с плоскостью; *в*) прямой, лежащей в плоскости.

1.143. Дана прямая *l*. Сколько плоскостей в пространстве содержат эту прямую?

1.144. На рисунке 1.31 изображен прямоугольный параллелепипед $ABCDA_1B_1C_1D_1$. Какой грани параллелепипеда принадлежат: прямая *AB*, прямая *BD*, прямая DC_1, прямая B_1D_1? Ваши выводы обос-

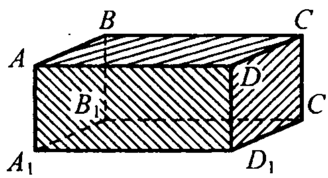


Рис. 1.31

нуйте.

1.145. В пространстве дана плоскость α и точки A и B, принадлежащие плоскости α (рис. 1.32). Проведите прямую через точки A и B. Сколько общих точек имеют построенная прямая и плоскость?

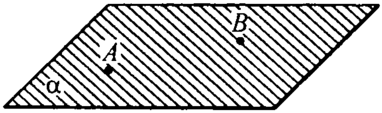


Рис. 1.32

1.146. На рисунке 1.33, *а–в* изображены различные случаи взаимного расположения прямой и плоскости. Сравните эти рисунки. Чем они отличаются друг от друга? Какими свойствами обладают прямая и плоскость в каждом случае? Обобщите полученную в результате решения этой задачи информацию.

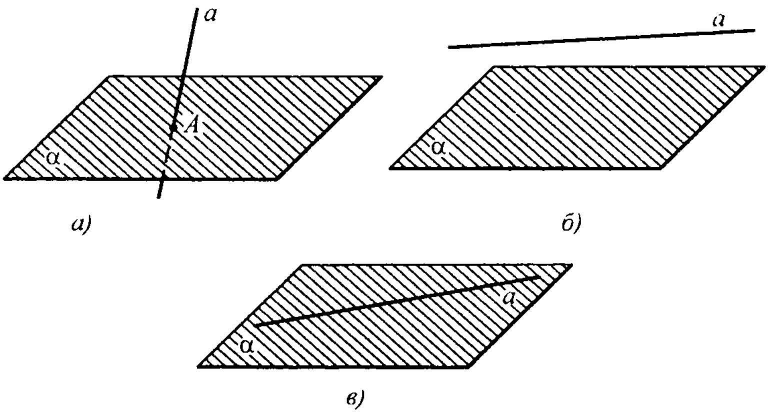


Рис. 1.33

1.147. Сколько прямых можно провести через пары различных точек A, B, C и D, если эти точки: а) лежат в одной плоскости; б) не лежат в одной плоскости?

1.148. В пространстве дана плоскость α и точка A, не принадлежащая этой плоскости. Проведите через точку A прямую l так, чтобы прямая имела с плоскостью единственную общую точку. Сколько таких прямых можно провести?

1.149. В пространстве дана плоскость α и две точки A и B, не принадлежащие плоскости α. Рассмотрите разные случаи взаимного расположения плоскости α и точек A и B. 1) В каждом из случаев через точки A и B проведете прямую. 2) Сколько общих точек имеют прямая и плоскость на каждом из рисунков?

1.150. На рисунке 1.34 изображена треугольная пирамида $SABC$. Сколько прямых, пересекающих плоскость, содержащую грань SAB, вы видите?

1.151. Сколько прямых, содержащих ребра данного куба, пересекают каждые две его противоположные грани?

1.152. На рисунке 1.35 изображена четырехугольная пирамида $SABCD$. Можете ли вы назвать прямые, которые содержат ребра пирамиды и не имеют общих точек: а) с гранью $ABCD$? б) с гранью SCD?

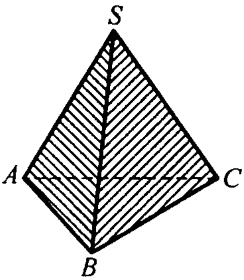


Рис. 1.34

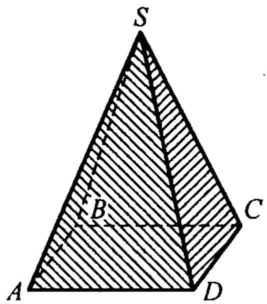


Рис. 1.35

1.153. Даны четыре точки A, B, C, D. Каково взаимное расположение этих точек? Сколько плоскостей могут определять эти точки?

1.154. Прямая l_1 не принадлежит α и пересекает плоскость α в точке P. Прямая l_2 принадлежит плоскости α, но не содержит точку P. Может ли прямая l_1 пересекать прямую l_2? Объясните ваш ответ.

1.155. (*Теорема о плоскости, проходящей через прямую и не лежащую на ней точку*). Докажите, что через прямую и не лежащую на ней точку, проходит одна и только одна, плоскость.

1.8. ВЗАИМНОЕ РАСПОЛОЖЕНИЕ ПЛОСКОСТЕЙ

Основное теоретическое содержание

В пространстве можно провести бесконечное множество различных плоскостей.

Представьте, что в пространстве проведена плоскость α. Эта плоскость разбивает пространство на две части — это два множества точек, которые на рисунке 1.36 заштрихованы.

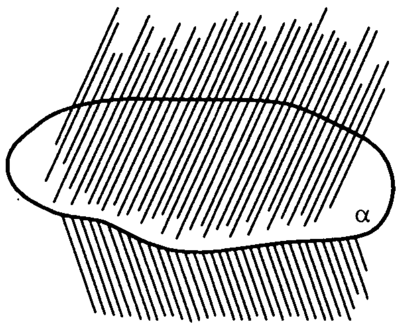


Рис. 1.36

Эта плоскость, вместе с одним из образовавшихся множеств, называется *полупространством.* Плоскость α называется *границей полупространства.*

Плоскость α в пространстве определяет два полупространства.

Понятие полупространства может иметь практическое значение. Так, плоскость, проходящая через экватор Земли, — это граница двух полупространств, в которых находятся два земных полушариями.

Две плоскости в пространстве могут: а) пересекаться по прямой, эти плоскости называются *пересекающимися*; б) не иметь общих точек, эти плоскости называются *параллельными.*

Для изучения расположения плоскостей в пространстве есть аксиома геометрии — *аксиома пересекающихся плоскостей.*

А к с и о м а (пересечения плоскостей). *Если две плоскости имеют общую точку, то они имеют и общую прямую.*

Задачи

1.156. Находясь в комнате (рис. 1.37), вы видите различные случаи взаимного расположения плоскостей (их частей). Ответьте на вопросы:

1. Сколько пар пересекающихся плоскостей вы видите?
2. Сколько пар параллельных плоскостей вы видите?
3. Сколько всего плоскостей (их частей) вы видите?

1.57. На рисунке 1.38 изображены две плоскости α и β. Какие общие точки они имеют?

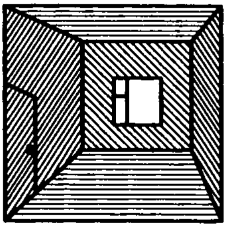


Рис. 1.37

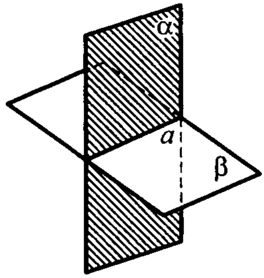


Рис. 1.38

1.158. Сколько различных пар параллельных плоскостей определяются вершинами куба?

1.159. Сколько различных взаимно пересекающихся плоскостей проходит через одну из вершин куба, если каждая из этих плоскостей содержит не менее трех вершин куба?

1.160. Что нужно знать о двух плоскостях, чтобы утверждать, что они пересекаются? Какая фигура является общей для двух пересекающихся плоскостей?

1.161. Обозначим через α и β плоскости двух смежных граней куба. Укажите, какие из следующих высказываний истинны:

1. Существуют пересекающиеся прямые $a \subset \alpha$, $b \subset \beta$.
2. Существуют параллельные прямые $a \subset \alpha$, $b \subset \beta$.
3. Существуют скрещивающиеся прямые $a \subset \alpha$, $b \subset \beta$.

1.162. Обозначим через α и β плоскости двух противоположных граней куба. Укажите, какие из следующих высказываний истинны:

1. Любые прямые $a \subset \alpha$, $b \subset \beta$ являются скрещивающимися.
2. Существуют прямые $a \subset \alpha$, $b \subset \beta$, которые являются скрещивающимися.

1.163. Две плоскости α и β пересекаются по прямой AB. Каждая из точек P и O принадлежит обеим плоскостям α и β. Должны ли точки P и O принадлежать прямой AB? Ваш вывод обоснуйте.

1.164. Даны две плоскости, которые пересекаются по прямой BC, и две прямые a и b ($a \subset \alpha$, $b \subset \beta$). Возможны ли такие случаи, что прямые a и b: а) параллельны; б) пересекаются; в) скрещиваются? К ответам дайте рисунок.

1.165. Даны две параллельные плоскости α и β ($\alpha \parallel \beta$) и две прямые a и b ($a \subset \alpha$, $b \subset \beta$). Возможны ли такие случаи, что прямые a и b: а) параллельны; б) пересекаются; в) скрещиваются?

1.166. У какого многогранника имеется наименьшее число граней (частей плоскостей)?

1.167. Может ли многогранник иметь только две параллельные грани (части плоскости)?

1.168. Докажите, что две различные плоскости не могут иметь две и только две общие точки.

1.169. Сколько различных плоскостей могут определять тройки точек, взятых из пяти данных точек?

1.170. (Разбиение пространства на части). Вы изучили материал, связанный с понятием плоскости. Пока мы еще мало что знаем о геометрии, ее методах, свойствах геометрических фигур, но уже можем начать проводить первые математические исследования: наблюдать, делать выводы, рассматривать различные случаи.

Определите, на сколько частей (областей) разбивают пространство две (три) плоскости. На какое наибольшее количество частей разбивают пространство две (три) плоскости?

Глава 2
ОБЩИЕ ПРЕДСТАВЛЕНИЯ О ГЕОМЕТРИЧЕСКИХ ФИГУРАХ

2.1. ПОНЯТИЕ ГЕОМЕТРИЧЕСКОЙ ФИГУРЫ. ОБЪЕДИНЕНИЕ И ПЕРЕСЕЧЕНИЕ ГЕОМЕТРИЧЕСКИХ ФИГУР

Основное теоретическое содержание

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 1. *Любое множество точек называется геометрической фигурой.*

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 2. *Пересечением двух или нескольких данных фигур называется фигура, состоящая из всех тех и только тех точек, которые принадлежат каждой из данных фигур.*

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 3. *Объединением двух или нескольких фигур называется фигура, состоящая из всех тех и только тех точек, которые принадлежат хотя бы одной из этих фигур.*

Термины и обозначения

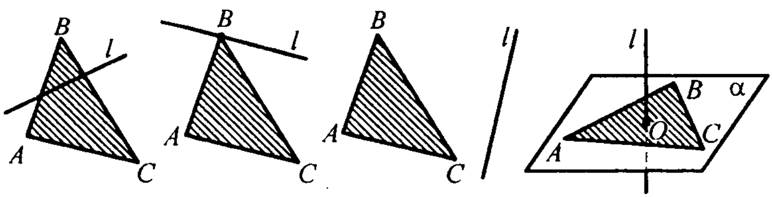
Для объединения и пересечения фигур применяют два знака: *знак объединения* «$\bigcup$»; *знак пересечения* «$\bigcap$».

Запись «$Ф_1 \bigcup Ф_2 = Ф_3$» читается так: «объединением фигур $Ф_1$ и $Ф_2$ является фигура $Ф_3$».

Запись «$a \bigcap b = C$» читается так: «пересечением прямых a и b является точка C».

Задачи

2.1. На рисунке 2.1, *а–г* изображены различные случаи взаимного расположения треугольника ABC и прямой l.



а) *б)* *в)* *г)*

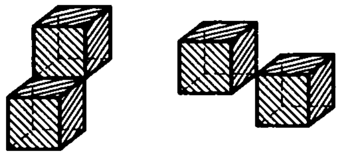
Рис. 2.1

В каждом случае ответьте на вопросы:

1. Какой фигурой является пересечение треугольника и прямой?

2. Какой фигурой является объединение треугольника и прямой?

2.2. На рисунке 2.2, *а*, *б* изображены различные случаи расположения двух кубов. Какими фигурами являются их объединение и пересечение?



а) *б)*

Рис. 2.2

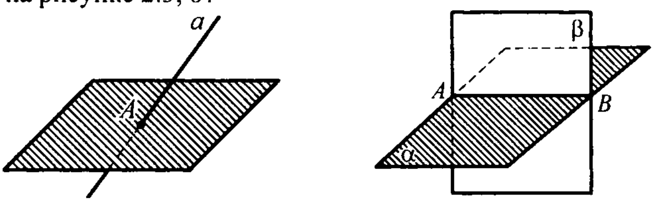
2.3. На рисунке 2.3, *а*, *б*, изображены случаи взаимного расположения точек, прямых и плоскостей. Ответьте на вопросы:

1. Какой фигурой является пересечение прямой и плоскости на рисунке 2.3, *а*?

2. Какой фигурой является пересечение плоскостей α и β на рисунке 2.3, *б*?

3. Какой фигурой является объединение точки A и плоскости α на рисунке 2.3, *а*?

4. Какой фигурой является объединение прямой AB и плоскости α на рисунке 2.3, *б*?



а) *б)*

Рис. 2.3

2.4. Может ли пересечение прямой и плоскости быть отрезком?

2.5. Может ли пересечение двух прямых быть точкой?

2.6. Может ли объединением точки и прямой быть прямая?

2.7. Может ли пересечением двух плоскостей быть точка?

2.8. Может ли объединением прямой и плоскости быть: а) точка; б) прямая; в) плоскость; г) пространство?

2.9. Как должны быть расположены плоскости, чтобы их объединением было пространство? Как будет при этом выглядеть пересечение этих плоскостей?

2.10. Как могут быть расположены два куба, чтобы их пересечением были: а) точка; б) отрезок; в) квадрат?

2.11. Изобразите расположение прямой и куба, при котором их пересечением является: а) точка; б) отрезок; в) пустое множество точек.

2.12. Может ли в пересечении двух квадратов получиться отрезок? Изобразите такое расположение квадратов. Какой фигурой может быть объединение двух квадратов?

2.13. Может ли пересечением двух квадратов быть квадрат?

2.14. На рисунке 2.4 изображен куб, сложенный из 8 маленьких одинаковых кубиков. Сколько прямоугольных параллелепипедов содержит данное объединение кубиков?

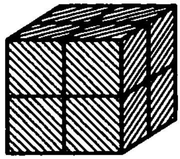
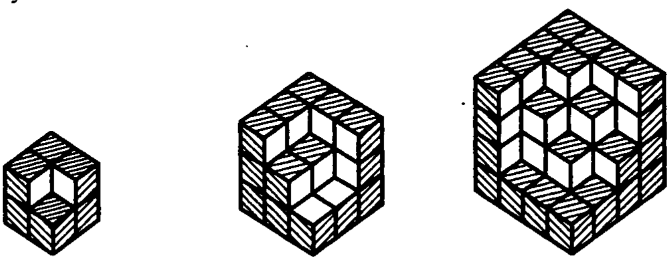


Рис. 2.4

2.15. Алеша из маленьких кубиков составляет большой куб. Ответьте на вопросы:

Сколько нужно добавить кубиков к фигурам, изображенным на рисунках 2.5, *а, б, в,* чтобы получить полный куб?



а) *б)* *в)*

Рис. 2.5

2.16. Сколько кубиков вы видите на рисунке 2.6?

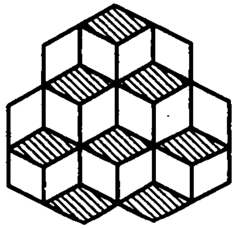


Рис. 2.6

2.17. Какие фигуры могут получиться при пересечении двух четырехугольников? Возможно ли, чтобы при пересечении двух четырехугольников образовались два четырехугольника? три четырехугольника?

2.18. Нарисуйте две фигуры так, чтобы: а) их объединением был круг, а пересечением — треугольник; б) их объединением был треугольник, а пересечением — круг; в) их объединением и пересечением был куб; г) их объединением и пересечением была пирамида.

2.19. Нарисуйте два цилиндра (два конуса) так, чтобы их пересечением был цилиндр (конус).

2.20. Приведите примеры одинаковых геометрических фигур, которые имеют: а) только одну общую точку; б) бесконечное множество общих точек, не лежащих на одной прямой; в) только одну общую прямую (при этом фигуры не являются плоскостями); г) ровно одну общую плоскость.

2.21. На какое наибольшее число частей можно разделить фигуру, изображенную на рисунке 2.7, тремя разрезами?

2.22. Какое наибольшее число частей можно получить при трех разрезах фигуры, изображенной на рисунке 2.8?

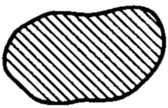


Рис. 2.7

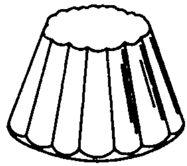


Рис. 2.8

2.23. Деревянный куб снаружи покрасили белой краской, каждое его ребро разделили на 3 (4, 5) равные части, после чего куб разрезали так, что получились маленькие кубики, у которых ребра в 3 (4, 5) раза меньше, чем у исходного куба. Сколько получилось маленьких кубиков? У скольких кубиков окрашены три грани? только одна грань? Сколько получилось неокрашенных кубиков?

2.24. Сколько различных фигур можно построить из 3 кубиков, соединяя два соседних кубика только по граням?

2.25. Сколько различных фигур можно построить из 4 кубиков, соединяя два соседних кубика только по граням?

2.26. На какое наибольшее число различных частей, не имеющих общих точек, кроме своих границ, могут разбить плоскость: а) прямая и окружность; б) три прямые; в) угол и окружность; г) три окружности?

2.27. Какие n-угольники можно получить как общую часть: а) угла и полуплоскости; б) двух углов; в) двух треугольников; г) треугольника и четырехугольника?

2.28. Даны круг $(O_1; r_1)$ и круг $(O_2; r_2)$, причем $O_1O_2 < r_1 + r_2$. Докажите, что общая часть этих кругов — выпуклая фигура.

2.29. Даны две выпуклые фигуры F_1 и F_2. Докажите, что фигура $F_1 \cap F_2$ выпуклая.

2.30. На рисунке 2.9 (*1–8; а–з*) показаны восемь кубов, разрезанных на две части. Первые части этих кубов представлены на позициях *1–8*, вторые — на позициях *а–з*. Для каждой из частей *1–8* найдите ее пару среди *а–з*.

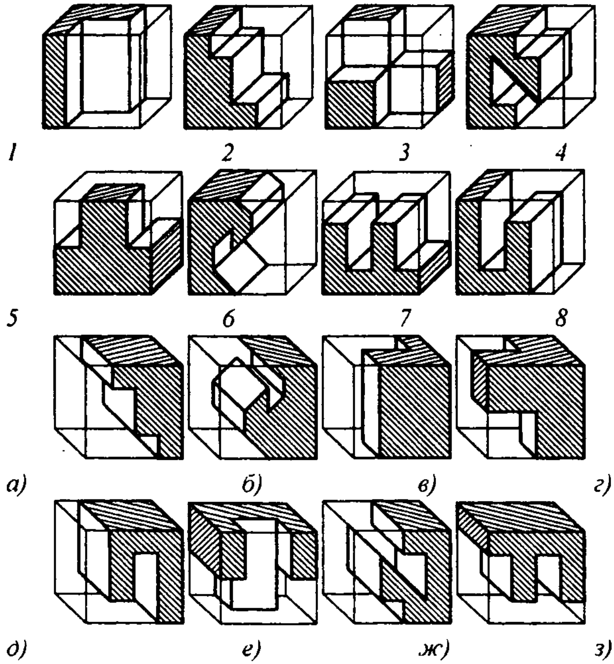


Рис. 2.9

2.31. Среди изображенных на рисунке 2.10 фигур укажите пары, которые дополняют друг друга до куба.

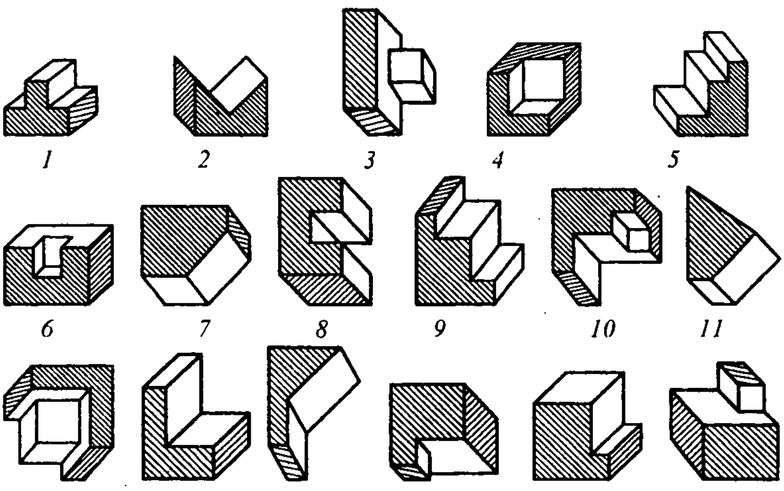


Рис. 2.10

2.32. На рисунке 2.11 найдите пары фигур, дополняющие друг друга до куба.

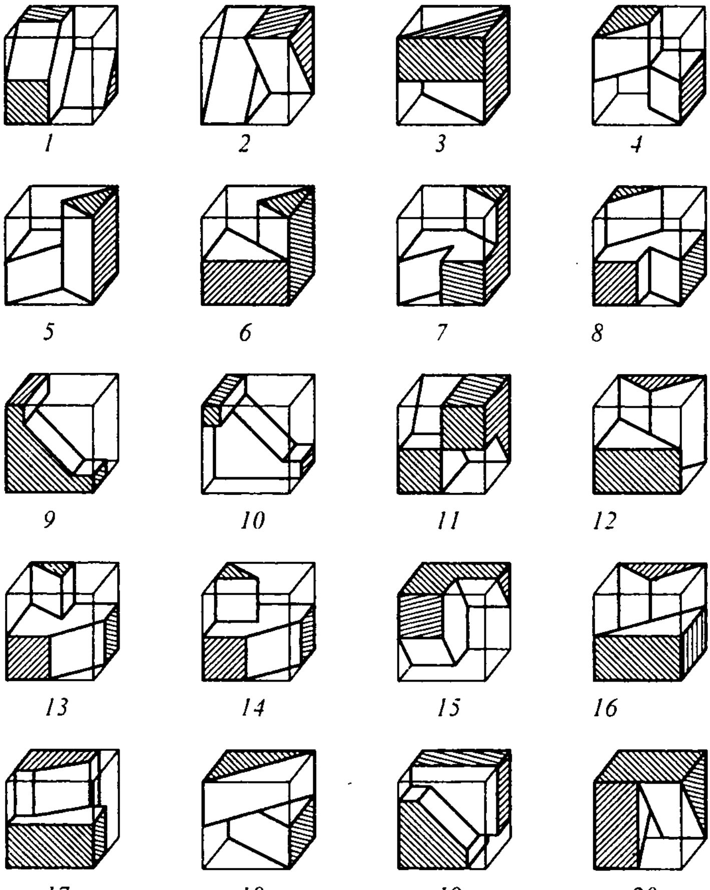


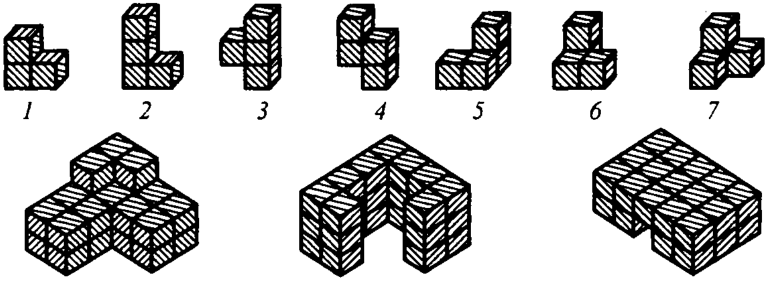
Рис. 2.11

2.33. На рисунке 2.12 изображены семь многогранников *1*, ..., *7*. Из них можно сконструировать различные фигуры. При конструировании предпочтительно сначала использовать наиболее «неправильные» многогранники (*5*, *6*, *7*), а многогранник *1* желательно использовать при сборке самым последним.

1. Сделайте из картона каждый из семи многогранников.

2. Сделайте эти многогранники так, чтобы каждый из кубиков имел ребро 6 см.

3. Составьте из этих многогранников фигуры, изображенные на рисунке 2.12, *а–в*.



а) *б)* *в)*

Рис. 2.12

2.2. ВЗАИМНОЕ РАСПОЛОЖЕНИЕ ПЛОСКОСТЕЙ И ГЕОМЕТРИЧЕСКИХ ФИГУР

Основное теоретическое содержание

Геометрические фигуры и плоскости могут иметь общие точки, в этом случае говорят о *сечении фигур плоскостью.* Среди фигур отдельно выделяют фигуры, все точки которых лежат в одной плоскости. Такие фигуры называют *плоскими.* Свойства этих фигур изучает раздел геометрии, называемый *планиметрией.* Это название происходит от латинского слова «планум» — равнина, плоскость.

Есть много геометрических фигур, все точки которых не лежат в одной плоскости. Раздел геометрии, который изучает свойства таких фигур, называют *стереометрией* (от греческого слова «стерео» — телесный, пространственный). Такие фигуры будем называть *пространственными фигурами или неплоскими (иногда их называют телами).*

Задачи

2.34. Назовите а) известные вам плоские фигуры; б) известные вам пространственные (неплоские) фигуры.

2.35. Всегда ли три точки лежат в одной плоскости?

2.36. Всегда ли четыре точки лежат в одной плоскости?

2.37. Лежат ли все вершины куба в одной плоскости?

2.38. Может ли куб лежать (стоять) на плоскости? Какая фигура в этом случае будет пересечением куба и плоскости?

2.39. Как провести плоскость сечения куба, чтобы это сечение имело форму квадрата? Сколько можно провести таких сечений? Выполните необходимые построения.

2.40. При пересечении какой фигуры плоскостью в сечении получается: а) квадрат; б) точка; в) отрезок; г) круг?

2.41. Какие фигуры могут получиться при пересечении куба плоскостью?

2.42. Начертите куб, поставьте на каждом из трех ребер, выходящих из одной его вершины, по одной точке. Постройте плоскость, которая пересекает куб и проходит через эти точки. Какая фигура будет пересечением куба и плоскости?

2.43. На рисунке 2.13 изображены четыре ряда по три различных «кусочка» куба (каждый из этих «кусочков» в свою очередь получен некоторым сечением куба) и между ними стоит знак объединения. Что получится в результате этого объединения в каждом случае? На рисунке приведен пример результата в наиболее простом случае. Попробуйте получить другие результаты.

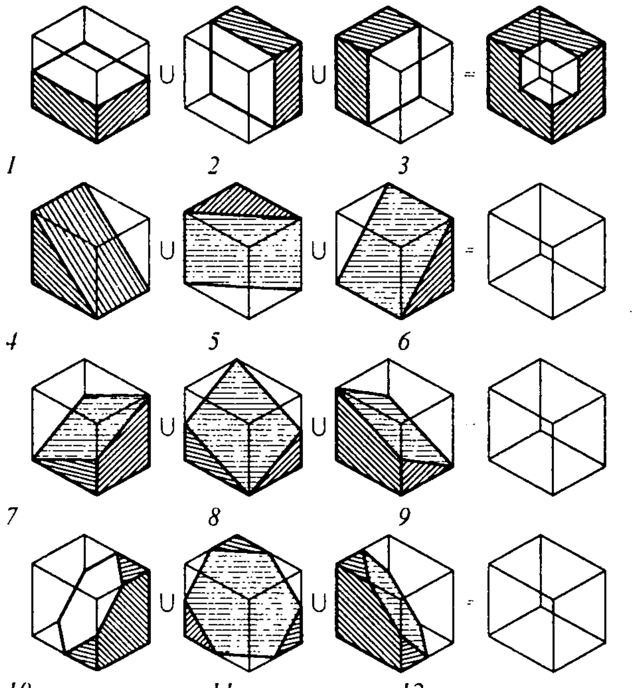


Рис. 2.13

2.44. Какие из закрашенных на рисунках фигур (рис. 2.14) с вершинами в вершинах куба или серединах его ребер являются сечениями куба плоскостью?

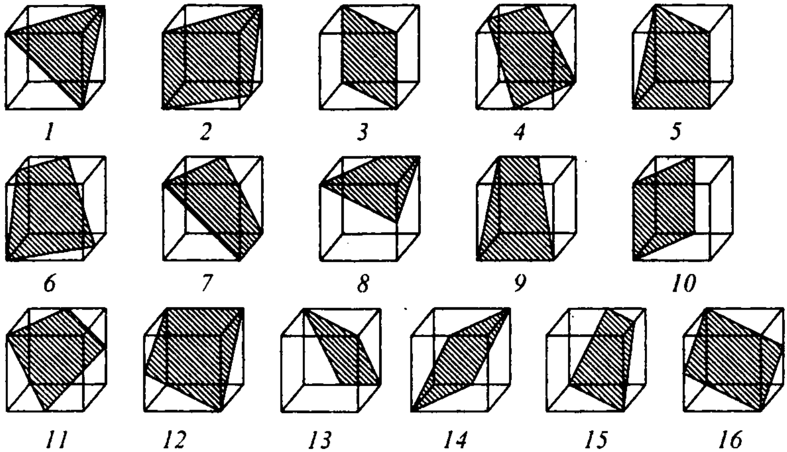


Рис. 2.14

2.45. Каждая из фигур *1–8* на рисунке 2.15, *а* является частью куба. Объединением каких трех фигур является каждая из фигур *а–з* на рисунке 2.15, если первоначальные кубы совмещать сдвигом?

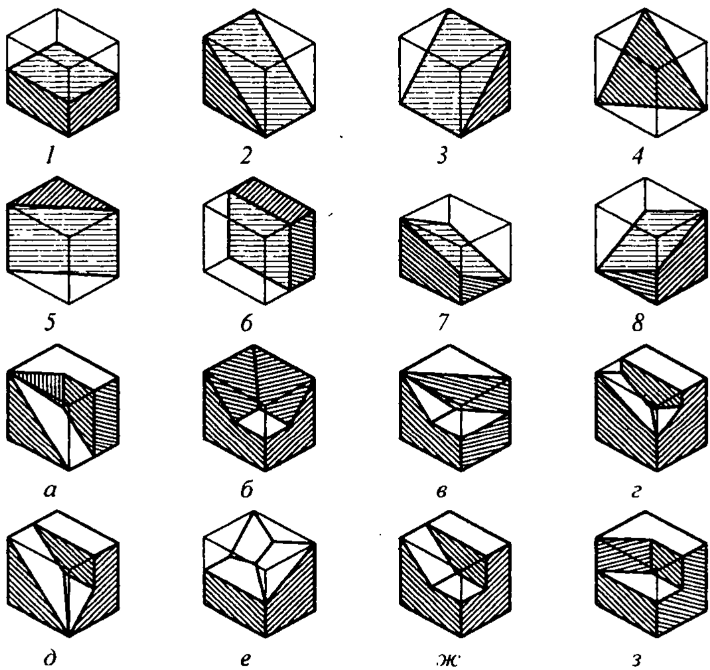


Рис. 2.15

2.3. ИЗОБРАЖЕНИЕ ГЕОМЕТРИЧЕСКИХ ФИГУР

Основное теоретическое содержание

Правила изображения пространственных фигур на плоскости (листе бумаги):

- *линии, которые не видны на изображении фигуры (они закрыты гранями), изображают пунктиром*;
- *отрезки всегда изображают отрезками, прямые — прямыми, плоскости — плоскостями*;
- *параллельные прямые (отрезки), имеющиеся на реальной модели, на рисунках тоже изображают параллельными прямыми (отрезками);*
- *если на модели куба отметить середины ребер, то и на рисунке их изображениями будут середины соответствующих отрезков — ребер.*

Задачи

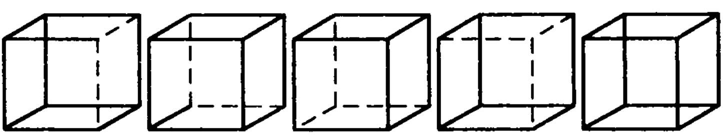
2.46. Расположите перед собой модель куба. Какие грани вы видите? Какие грани вы не видите? Какие ребра вы видите? Какие ребра вы не видите?

2.47. Посмотрите на модель тетраэдра — треугольной пирамиды с равными ребрами. Сколько граней вы видите? Сколько ребер вы видите?

2.48. Можно ли расположить куб перед глазами так, чтобы видеть: а) только одну грань куба; б) только две грани куба; в) только три грани куба? Опишите, как в каждом случае вы расположили куб.

2.49. Решите задачу 2.48, заменив слово «грань» на слово «ребро».

2.50. На рисунке 2.16, *а–д* даны различные изображения каркасного куба. Какие из этих изображений правильные?



а) *б)* *в)* *г)* *д)*

Рис. 2.16

2.51. Можно ли расположить перед глазами модель тетраэдра так, чтобы были видны все его ребра?

2.52. Начертите в тетради куб $ABCDA_1B_1C_1D_1$. Как вы изобразили ребра, которые видите? Как вы изобразили ребра, которые не видите? Какие грани вам не видны? Какие отличия в изображении видимых и невидимых ребер и граней вы видите?

2.53. Достройте фигуру, изображенную на рисунке 2.17, до куба.

2.54. Внимательно изучите изображенный на рисунке 2.18 прямоугольный параллелепипед. Закройте книгу и сделайте по памяти рисунок, похожий на этот. Попрактикуйтесь до тех пор, пока не будете довольны своим результатом.

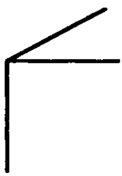


Рис. 2.17

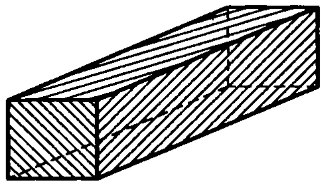


Рис. 2.18

2.55. На клетчатой бумаге изображены видимые ребра куба (рис. 2.19). Проведите невидимые ребра куба.

2.56. На клетчатой бумаге изображены видимые грани и ребра пирамиды (рис. 2.20). Проведите невидимые ребра пирамиды.

2.57. На клетчатой бумаге начали изображать прямоугольный параллелепипед (рис. 2.21). Проведите остальные ребра параллелепипеда.

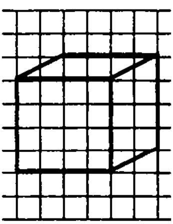


Рис. 2.19

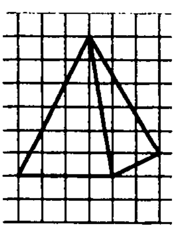


Рис. 2.20

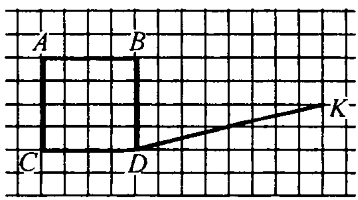


Рис. 2.21

2.58. На клетчатой бумаге изображены различные многогранники (видимые грани и ребра) (рис. 2.22). Проведите невидимые ребра этих многогранников.

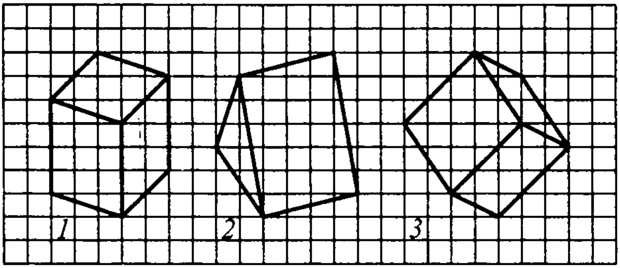


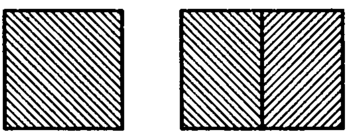
Рис. 2.22

2.59. Возьмите в руки модель куба (желательно не очень маленькую). Посмотрите на нее: а) слева снизу; б) справа снизу; в) справа сверху; г) слева сверху. Отметьте те грани и ребра, которые при этом не видны. Сделайте соответствующие рисунки в тетради.

2.60. Изобразите куб, у которого видны: а) передняя, правая и верхняя грани; б) передняя, левая и верхняя грани.

2.61. Можно ли считать, что на рисунке 2.23, *а*, *б* помещены верные изображения куба?

2.62. На рисунке 2.24 фигура не дорисована (верхняя часть изображения закрыта листом бумаги). Дорисуйте ее.



а) *б)*

Рис. 2.23

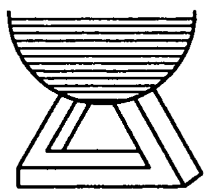
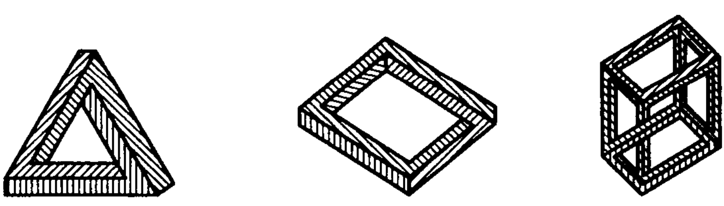


Рис. 2.24

2.63. Объясните, могут ли существовать не на бумаге, а в реальной жизни фигуры, изображенные на рисунке 2.25, *а–в*?



а) *б)* *в)*

Рис. 2.25

2.64. Можно ли сконструировать «многогранник», представленный на рисунке 2.26?

2.65. Нарисуйте вид справа и спереди многогранников, изображенных на рисунке 2.27, *а–в*.

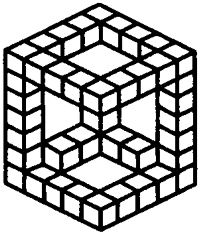
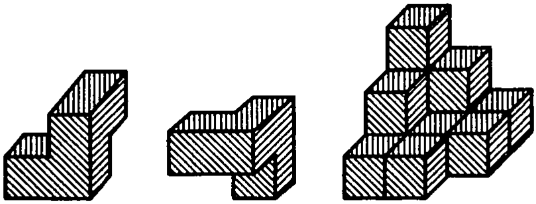


Рис. 2.26

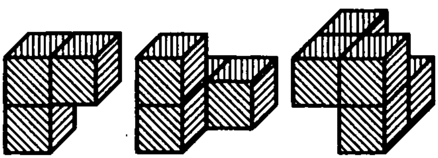


а) *б)* *в)*

Рис. 2.27

2.66. Нарисуйте вид спереди, справа, слева для каждого из многогранников, изображенных на рисунке 2.28, *а–в*.

2.67. Нарисуйте вид спереди, справа, слева и сзади изображенного на рисунке 2.29 многогранника (он состоит из 11 кубиков).



а) *б)* *в)*

Рис. 2.28

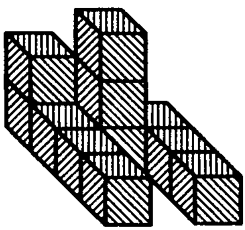
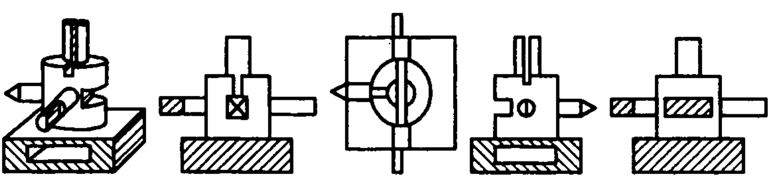


Рис. 2.29

2.68. На рисунке 2.30, *а* изображена некоторая фигура, а на рисунке 2.30, *б–д* даны изображения этой фигуры с разных сторон. Один из этих рисунков ошибочный. Какой?



а) *б)* *в)* *г)* *д)*

Рис. 2.30

2.69. Среди кубиков с номерами от *1* до *11* (рис. 2.31) найдите парные кубики для *A*, *B* и *C*. При этом нужно сравнивать цвета граней и их положения.

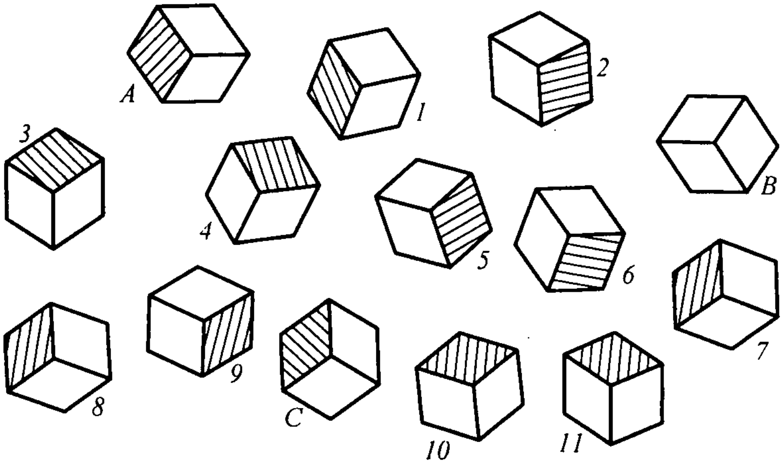
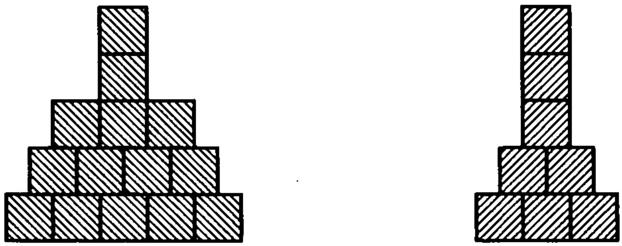


Рис. 2.31

2.70. Мальчик построил из кубиков здание. На рис. 2.32 показано, как это здание выглядит спереди и слева. Какое наименьшее и наибольшее число кубиков потребуется для постройки этого здания?



а) вид спереди *б) вид слева*

Рис. 2.32

Глава 3
ОТРЕЗКИ И ИХ ИЗМЕРЕНИЕ

3.1. ПОНЯТИЕ ОТРЕЗКА

Основное теоретическое содержание

Согласно аксиоме прямой, двум точкам соответствует единственная прямая. На рисунке 3.1 через точки A и B проходит прямая AB. На этой прямой жирно выделена ее часть, ограниченная двумя точками A и B. Такая часть прямой называется *отрезком*. Точки A и B, ограничивающие отрезок, называются *его концами*. На *рисунке 3.1* изображен отрезок с концами в точках A и B.

Рис. 3.1

Отрезки нам встречаются повсюду: ребра многогранников и линии пересечения стен в комнате, иголки ежа и ели, шпалы полотна железной дороги, карандаши, спицы и т.д.

Термины и обозначения

Для отрезков нет специальных обозначений, пишут просто «отрезок AB». Запись «AB» ничего не обозначает.

Задачи

3.1. На рисунке 3.1 изображен отрезок AB. Как называются точки A и B?

3.2. На рисунке 3.2 изображен куб $ABCDA_1B_1C_1D_1$. Ответьте на вопросы:

1. Сколько отрезков, являющихся ребрами куба, выходит из каждой вершины куба?

2. Сколько ребер имеет куб?

3.3. На рисунке 3.3 изображен прямоугольный параллелепипед. Ответьте на вопросы:

1. Сколько отрезков (ребер) выходит из каждой вершины параллелепипеда?

2. Сколько ребер имеет прямоугольный параллелепипед?

3.4. Что нужно знать, чтобы утверждать, что отрезок: а) пересекает прямую; б) пересекает плоскость; в) не пересекает прямую; г) не пересекает плоскость?

3.5. Как проверить, лежит ли отрезок AB: а) в одной полуплоскости (в разных полуплоскостях), заданной некоторой прямой a; б) в одном полупространстве (в разных полупространствах), заданном некоторой плоскостью α?

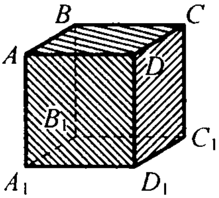


Рис. 3.2

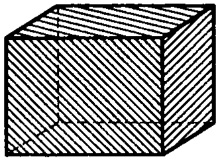


Рис. 3. 3

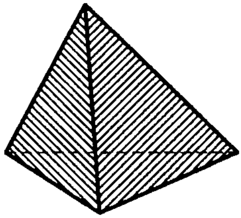
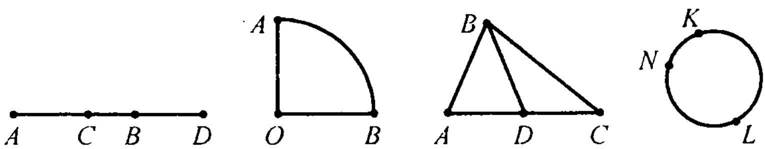


Рис. 3.4

3.6. На рисунке 3.2 изображен куб $ABCCDA_1B_1C_1D_1$. Могут ли вершины куба задавать отрезки, отличные от ребер куба? Назовите эти отрезки.

3.7. На рисунке 3.4 изображена треугольная пирамида. Существуют ли другие отрезки (кроме ребер пирамиды), соединяющие вершины пирамиды?

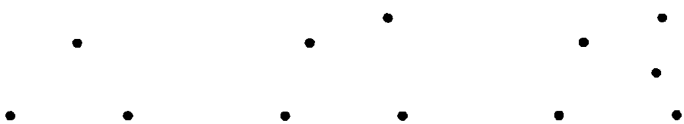
3.8. На рисунке 3.5 изображены различные фигуры. Сколько отрезков вы видите на этих рисунках (имеются в виду отрезки, соединяющие выделенные жирно точки).



а) *б)* *в)* *г)*

Рис. 3.5

3.9. На рисунке 3.6, *а, б, в* изображены 3, 4 и 5 точек. Соедините эти точки на каждом рисунке отрезками. Сколько отрезков вы получите в каждом случае?



а) *б)* *в)*

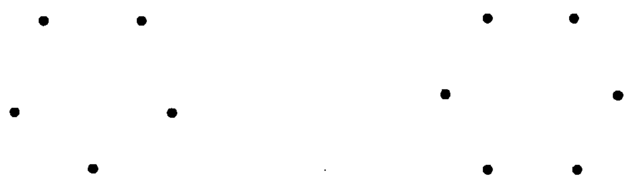
Рис. 3.6

3.10. Даны отрезок и прямая. Назовите случаи их взаимного расположения? Сделайте соответствующие рисунки.

3.11. Даны отрезок и плоскость. Каковы случаи их взаимного расположения? Рассмотрите и изобразите возможные случаи расположения отрезка и плоскости.

3.12. Даны две (три, четыре) различные точки. Как они могут быть расположены? Сколько отрезков с концами в этих точках мы можем при этом получить? Изобразите все возможные случаи.

3.13. На рисунке 3.7, *а–б* изображены 5 и 6 точек. Соедините на каждом рисунке эти точки отрезками. Сколько отрезков вы получите в каждом случае?



а) *б)*

Рис. 3.7

3.14. Даны различные точки A, B, C, D. Сколько существует различных отрезков, оба конца которых принадлежат фигуре, состоящей из точек: а) A, B, C; б) A, B, C и D?

3.15. Дан куб $ABCCDA_1B_1C_1D_1$. Вершину A куба соедините отрезками с другими его вершинами. Сколько отрезков вы при этом получите?

3.16. Внутри куба $ABCCDA_1B_1C_1D_1$ взята точка O. Эту точку соедините со всеми вершинами куба. Сколько отрезков при этом получится?

3.17. На прямой даны 2, 3, 4 точек. Сколько отрезков при этом имеется на данной прямой?

3.18. 1) На прямой нужно получить три отрезка. Сколько для этого следует отметить точек на данной прямой?

2) Решите задачу для случаев, когда надо получить 4, 5, 6 отрезков.

3.19. Докажите, что если две точки отрезка AB принадлежат отрезку CD, то эти отрезки лежат на одной прямой.

3.20. Расставьте на плоскости шесть точек таким образом, что если соединить первую точку со второй, вторую с третьей и т.д., а шестую вновь с первой, то каждый из шести отрезков ровно один раз пересекается с каким-либо другим отрезком.

3.21. Дан отрезок AB. Назовите, какую фигуру образует множество всех таких точек X этого отрезка, для которых:

а) $AX < AB$; б) $AX = BX$; в) $AX \le \frac{AB}{2}$; г) $AX \ne BX$.

3.22. Даны две точки A и B. Покажите на рисунке множество таких точек X плоскости, для которых: а) $BX - AX = AB$; б) $AX - BX = AB$; в) $AX + BX \le AB$.

3.23. В каких многогранниках из одной вершины исходят 3 отрезка (ребра); 4 отрезка (ребра); 5 отрезков (ребер) и т.д.? Изобразите эти многогранники.

3.24. Начертите многогранник, имеющий: а) 8 ребер; б) 9 ребер.

3.25. Назовите (изобразите) многогранник, имеющий наименьшее число ребер. Сколько у него вершин? граней?

3.26. Постройте многогранник, из каждой вершины которого выходят более трех ребер.

3.27. На сколько частей n точек делят прямую?

3.2. ИЗМЕРЕНИЕ ДЛИН ОТРЕЗКОВ

Основное теоретическое содержание

Каждому отрезку соответствует его длина. Длиной отрезка также называют расстояние между двумя точками, являющимися концами этого отрезка.

Процесс нахождения длин отрезков называют *измерением длин отрезков*. Измерить отрезок — значит сравнить его длину с длиной некоторого отрезка, принятого за единицу измерения. Если за единицу измерения принят метр, то для определения длины отрезка узнают, сколько раз в этом отрезке укладывается метр. Для измерения длин отрезков можно сформулировать некоторые свойства:

- *каждый отрезок имеет определенную длину больше нуля;*
- *длина отрезка равна сумме длин частей, на которые он разбивается любой его точкой.*

После изучения свойств длин отрезков мы можем ввести понятие *точки, лежащей между двумя данными точками* на данной прямой.

Отношение «лежать между» является одним из основных отношений взаимного расположения точек на прямой. Точки на прямой могут лежать между двумя данными точками на этой прямой или не лежать между ними. Если точка O лежит между точками A и B, то в этом случае говорят также, что точки A и B лежат на прямой по разные стороны от точки O. В противном случае говорят, что точки A и B лежат на прямой по одну сторону от точки O.

В качестве основного свойства взаимного расположения точек на прямой можно сформулировать следующее:

Из трех точек на прямой только одна лежит между двумя другими.

Термины и обозначения

Иногда, говоря «отрезок», мы имеем в виду его длину. Запись «AB = 5 см» читается так: «отрезок AB имеет длину 5 см или отрезок AB длиной 5 см».

Задачи

3.28. На рисунке 3.8 точка A принадлежит отрезку CD. Какими свойствами обладают длины отрезков AD, DC и CA?

3.29. На рисунке 3.9 изображены вехи различной высоты. Какую аналогию вы можете провести между вехами и изученными геометрическими фигурами? Как можно сравнить между собой эти вехи?

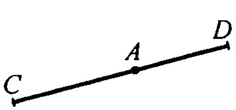


Рис. 3.8

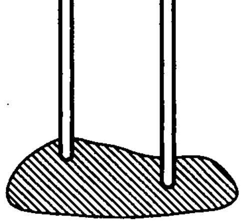


Рис. 3.9

3.30. Как расположены три различные точки A, B, C, если $AB + BC = AC$?

3.31. Пусть A, B, C — три различные точки. Может ли случиться, что будет выполняться неравенство $AB + BC > AC$? Если нет, то почему? Если да, то как расположены точки A, B, C?

3.32. Могут ли для трех точек A, B и C одной прямой одновременно выполняться равенства: $AB + BC = AC$ и $AC + CB = AB$?

3.33. Точка A лежит на прямой BC. Лежит ли точка A между точками B и C, если $AB + AC = BC$? Объясните ваш ответ.

3.34. Точки A, B, C лежат на одной прямой. Какая из этих точек лежит между двумя другими, если $AB = AC$? Объясните ваш ответ.

3.35. Пусть A, B, C — три точки на окружности. Можно ли сказать, что каждая из этих точек лежит между двумя другими?

3.36. Почему предложение «Точка B называется серединой отрезка AC, если $AB = BC$» нельзя считать определением середины отрезка?

3.37. Посередине доски длиной 2 м, т. е. на расстоянии 1 м от каждого из ее концов, проведена черта. Столяр тщательно распиливает доску по этой черте. Однако ни одна из двух получившихся при этом половин не имеет длины 1 м. Более того, общая длина этих двух половин не равна всей длине доски. Как это объяснить?

3.38. На отрезке MN отметили точку P. Запишите, чему равна длина отрезка MN, если $MP = 3$, $PN = 2$.

3.39. Расстояние между двумя точками, измеренное в сантиметрах, равно 12. Чему будет равно это расстояние, если за единицу длины принять миллиметр?

3.40. Расстояние между двумя точками, измеренное в миллиметрах, равно 9. Чему равно это расстояние, выраженное в сантиметрах?

3.41. Расстояние PK равно 54 см. Чему оно равно в дециметрах? в метрах?

3.42. Расстояние PC равно 54 дм. Чему оно равно в сантиметрах? в метрах?

3.43. В каждом из следующих равенств вставьте пропущенные числа:

а) 2 м = ... см = ... мм;

б) ... м = ... см = 1 мм;

в) ... м = 50 см = ... мм.

3.44. Точка B лежит на прямой между точками A и C; $AB = 2$, $AC = 5$. Найдите расстояние BC.

3.45. У крышки стола есть две характеризующие ее величины — длина и ширина. Измерьте длину и ширину крышки твоего письменного стола, приняв за единицу длины: а) ширину обложки тетради по математике; б) длину обложки учебника «Геометрия». Сравни результаты.

3.46. Пусть P, C, M — три точки на некоторой прямой. Какое соотношение между отрезками PC, CM и PM должно выполняться, если P лежит между C и M?

3.47. Если расстояние PC равно x дм, то чему оно равно в сантиметрах?

3.48. Расстояние AB, измеренное в сантиметрах, на 15 больше, чем то же самое пятикратное расстояние, измеренное в дециметрах. Чему равно расстояние AB в дециметрах?

3.49. На прямой расположены три точки A, B и C (рис. 3.10). Найдите расстояние AC, если: а) $AB = 6$ см, $BC = 12$ см; б) $AB = 6$ м, $BC = 12$ м; в) $AB = 6$ км, $BC = 12$ км.

Рис. 3.10

3.50. Решите задачу 3.49 при условиях: а) $AB = 6$ м, $BC = 12$ см; б) $AB = 6$ см, $BC = 12$ м; в) $AB = 6$ км, $BC = 12$ см.

3.51. В задачах 3.49 и 3.50 заданы только числа 6 и 12. Объясните, почему же в ответах задачи 3.49 во всех трех случаях получается одно и то же число, хотя единицы разные, а в задаче 3.50 все ответы различны.

3.52. Обсудите следующие вопросы:

1. Почему существует столько различных единиц длины?

2. Если допустить, что мы можем установить одну универсальную единицу длины, то какие преимущества это дало бы? какие недостатки?

3.53. Куб со стороной 1 м распилили на кубы со стороной 1 см. Получившиеся кубики выложили в ряд. Чему равна длина ряда?

3.54. На книжной полке стоит трехтомник. Толщина каждого тома 3,5 см. Книжный червяк прополз от первой страницы первого тома до последней страницы третьего тома. Его путь — отрезок. Какой путь он проделал? Толщиной обложки пренебречь.

3.55. Известно, что отрезок $MN = 12$. На отрезке MN отметили точку P так, что длина отрезка MP на 2 больше, чем длина отрезка PN. Чему равны длины отрезков MP и PN?

3.56. На рисунке 3.11 изображена треугольная пирамида $SABC$. Ребра SA и SC равны соответственно 3 и 4 см. Какую длину может иметь ребро AC данной пирамиды?

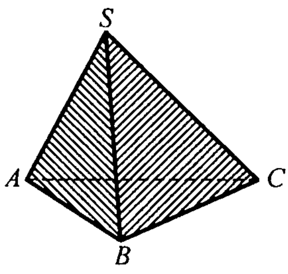


Рис. 3.11

3.57. Сколькими способами из отрезков длиной 7 и 12 см можно составить отрезок длиной 1 м?

3.58. Пусть E, H, K — три точки на прямой. Точки E и H отстоят друг от друга на 3 см, а точки H и K — на 5 см. Сколькими способами можно расположить на прямой эти три точки? Поясните выводы рисунками.

3.59. Пусть P, K, M — три точки некоторой прямой. Какая из этих точек лежит между двумя другими, если $PK = 12$, $PM = 7$ и $KM = 5$? Обоснуйте вывод.

3.60. Пусть D, H, K — три точки некоторой прямой. Определите, какое из следующих утверждений верно:

1) точка K лежит между D и H и точка H лежит между D и K;
2) точка H лежит между K и D и точка H лежит между D и K;
3) точка D лежит между H и K и точка K лежит между D и H;
4) точка K лежит между H и D и точка D лежит между K и H;
5) точка D лежит между K и H и точка D лежит между H и K.

И **3.61.** Города X, Y и Z на карте расположены на одной прямой, но не обязательно в том порядке, в котором перечислены! Расстояние от X до Y равно 12 км; расстояние от Y до Z — 21 км.

1. Можно ли сказать, какой город находится между двумя другими? Какой город не находится между двумя другими?

2. Сделайте рисунок и с его помощью определите расстояние от X до Y. Сколько вариантов решения у этой задачи?

3. Вам дополнительно стало известно, что расстояние от X до Z равно 9 км. Какой город находится между двумя другими?

4. Расстояние между X и Y равно k км, между X и Z — n км, между Y и Z — $(k + n)$ км. Какой город находится между двумя другими?

3.3. РАВЕНСТВО ОТРЕЗКОВ

Основное теоретическое содержание

В геометрии и в окружающей нас действительности мы часто встречаем фигуры (объекты), имеющие одинаковые формы и размеры. Мы их назовем *одинаковыми или равными.*

Самым простым способом распознавать равенство отрезков является сравнение их размеров — длин.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 1. *Отрезки равны, если равны их длины.*

Таким образом, все отрезки одинаковой длины равны...

Существует еще один подход к определению равенства фигур: наложение одной фигуры на другую.

Дадим еще одно определение равенства отрезков.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 2. *Отрезки равны, если при наложении друг на друга они совпадают.*

Термины и обозначения

Равенство отрезков обозначается знаком «=». Запись «$AB = CD$» читаем «отрезок AB равен отрезку CD». Иногда используется запись: « $AB \neq CD$ », читаем «отрезок AB не равен отрезку CD».

Задачи

3.62. Даны прямая a и точка A на ней. Сколько равных отрезков длиной 5 *см* можно отложить на прямой a от точки A?

3.63. Отрезок AB длиннее отрезка CD, а отрезок CD длиннее отрезка KL. Верно ли, что отрезок AB длиннее отрезка KL? Ответ поясни.

3.64. Отрезки AB и CD равны между собой. Отрезок AB длиннее отрезка KL. Верно ли, что отрезок KL короче отрезка CD? Ответ поясни.

3.65. На столе стоит модель куба. Есть ли у этого куба равные ребра? Сколько их?

3.66. "Свойств прямоугольного параллелепипеда мы пока не знаем, попробуйте на глаз определить, есть ли у прямоугольного параллелепипеда равные ребра?

3.67. При строительстве забора плотники поставили по прямой 10 столбов, расстояние между соседними столбами было равно 2 м. Какова длина забора? Толщину столбов не учитывать.

3.68. На расстоянии 5 м друг от друга посажены в один ряд 5 деревьев. Чему равно расстояние между крайними деревьями? Толщину деревьев не учитывать.

3.69. Для предстоящего ремонта вдоль железной дороги длиной 10 км выложены рельсы, каждая из которых имеет длину 10 м. Рельсы выложены так, что между ними нет промежутков (и некоторые из них могут накладываться друг на друга). Какое наибольшее число рельсов может лежать вдоль дороги, если известно, что промежуток между рельсами немедленно возникает, если убрать любой рельс?

3.70. Петя живет на шестнадцатом этаже, а Коля — на четвертом. Во сколько раз больше, чем Коле, необходимо пройти ступенек Пете?

3.71. Пете необходимо пройти в 4 раза больше ступенек, чем Коле. Коля живет на третьем этаже. На каком этаже живет Петя?

3.72. Коля и Петя живут в одном доме: Коля — на пятом этаже, а Петя — на втором. Если Петя, поднимаясь к себе, проходит 20 ступенек, то сколько ступенек проходит Коля, поднимаясь по лестнице на свой этаж? Во сколько раз больше, чем Пете, необходимо пройти ступенек Коле?

3.73. Нарисуйте прямую l и отметьте на ней точку A. Отложите от точки A подряд шесть равных между собой отрезков. Обозначьте полученные точки. Назовите:

а) два равных между собой отрезка, больших, чем вы откладывали;

б) два отрезка, один из которых в 2,5 раза больше другого;

в) два отрезка, один из которых составляет две трети другого;

г) точку, которая делит пополам сразу несколько отрезков.

T **3.74.** На рисунке 3.12 $AC = BD$. Докажите, что $AB = CD$.

Рис. 3.12

3.75. Кузнечик сделал 3 прыжка вдоль прямой линии в одном направлении и 2 прыжка вдоль прямой линии в противоположном направлении. Первый прыжок имел длину 11 см, второй — 7 см, затем — 6 см, 5 см и 3 см. 1) На какое расстояние удалился кузнечик от исходной точки? 2) Как должен прыгать кузнечик вдоль прямой линии (сколько ему делать прыжков в прямом и сколько в обратном направлении), чтобы он оказался в исходной точке?

3.4. ВЗАИМНОЕ РАСПОЛОЖЕНИЕ ОТРЕЗКОВ

Основное теоретическое содержание

Отрезки, принадлежащие параллельным прямым, называют *параллельными.*

Отрезки, имеющие общую точку, называют *пересекающимися.*

Задачи

3.76. Известно, что два отрезка имеют одну общую точку. Как они могут быть расположены?

3.77. Что нужно знать, чтобы утверждать, что отрезки пересекаются?

3.78. Что нужно знать, чтобы утверждать, что отрезки параллельны?

3.79. На рисунке 3.13 изображен куб. Сколько отрезков, являющихся ребрами куба, сходится в каждой вершине куба? Есть ли среди отрезков, являющихся ребрами куба, параллельные отрезки? Есть ли среди ребер куба попарно скрещивающиеся отрезки? Назовите их.

3.80. На рисунке 3.14 изображен куб. В кубе проведены диагонали граней и диагонали куба. Каким может быть взаимное расположение этих диагоналей? Сколько отрезков сходится в каждой вершине куба?

3.81. На рисунке 3.15 изображена треугольная пирамида. Сколько отрезков, являющихся ребрами этой пирамиды, сходится в каждой ее вершине? Есть ли среди отрезков, являющихся ребрами треугольной пирамиды, параллельные отрезки? Есть ли среди них скрещивающиеся отрезки?

3.82. Каким может быть взаимное расположение трех отрезков, лежащих в одной плоскости?

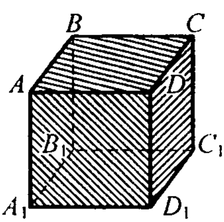


Рис. 3.13

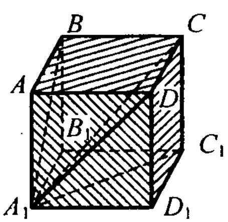


Рис. 3.14

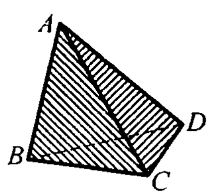


Рис. 3.15

3.83. Каким может быть взаимное расположение четырех отрезков, лежащих в одной плоскости? Сделайте соответствующие рисунки.

3.84. Даны два отрезка. Как они могут быть расположены относительно друг друга? Сколько у них может быть общих точек?

Т **3.85.** Можно ли расположить на плоскости 6 отрезков так, чтобы каждый из них пересекался ровно с тремя другими? Тот же вопрос для 7 отрезков.

3.5. РАССТОЯНИЕ МЕЖДУ ТОЧКАМИ НА ПЛОСКОСТИ

Основное теоретическое содержание

Для длины отрезка есть еще одно название «*расстояние между двумя точками*». Если первое название широко применяется в геометрии, то второй термин используется в практической жизни.

Мы исходим из того, что термины «длина отрезка» и «расстояние между двумя точками» являются синонимами. Есть интересный подход к введению понятия «расстояние между двумя точками» в учебнике А. Н. Колмогорова и др.

Сформулируем свойства расстояний.

1. *Расстояние от одной точки до другой больше нуля, если эти точки различны, и равно нулю, если они совпадают*:

$$AB > 0, \text{ если } A \neq B, \text{ и } AB = 0, \text{ если } A = B.$$

2. *Для любых точек A и B расстояние от A до B равно расстоянию от B до A*:

$$AB = BA.$$

Отметьте точки A, B, C. Измерьте расстояния AB, AC, BC и сравните сумму $AB + BC$ с расстоянием AC. Как бы вы ни выбирали точки A, B и C, обнаружится, что расстояние AC меньше или равно сумме $AB + BC$ (рис. 3.16, *а*, *б*, *в*).

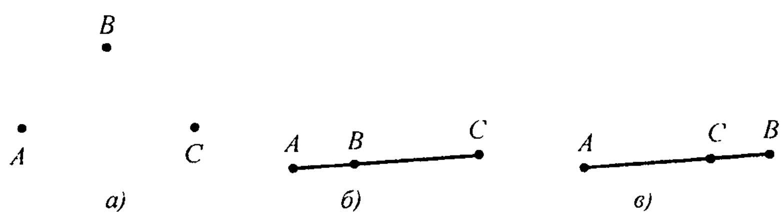


Рис. 3.16

3. *Для любых точек A, B, C расстояние AC меньше или равно сумме расстояний AB и BC:*

$$AC \leq AB + BC .$$

Свойства 1, 2 и 3 принято называть *основными свойствами расстояний.*

Опираясь на известные нам аксиомы, определения и свойства, мы можем доказать теоремы курса геометрии.

ТЕОРЕМА 1. *Для любых точек A, B, C расстояние $|AC|$ больше или равно разности расстояний AB и BC* :

ТЕОРЕМА 2 (Неравенство треугольника). *Для любых точек A, B и C, не принадлежащих одной прямой, расстояние AC меньше суммы расстояний AB и BC, т. е. $AC < AB + BC$.*

Задачи

Задача 3.86. Известно, что $AB = 8$ см, $BC = 4$ см. 1) Может ли при этом условии расстояние AC оказаться равным: а) 20 см; б) 4,5 см; в) 12 см; г) 4 см; д) 3 см; е) 6 см? 2) Укажите еще какие-либо возможные значения расстояния AC.

Задача 3.87. Можно ли построить три такие точки X, Y и Z, для которых выполняются следующие требования:

а) $XY + YZ = XZ$, $XZ - XY > YZ$;

б) $XZ - XY = YZ$, $XY + YZ \geq XZ$;

в) $XY + YZ > XZ$, $XY - XZ = YZ$?

Для случаев, когда построение возможно, сделайте рисунок.

Задача 3.88. Расстояние AB равно 2 см. 1) Каким может быть расстояние AX, где X — произвольная точка окружности (B, 3 см)? 2) Существует ли такая точка C этой окр. (B, 3 см), что точки A, B и C лежат на одной прямой?

Задача 3.89. Ниже приведено несколько равенств и неравенств. Укажите те из них, которые: 1) верны для любых точек X, Y, Z; 2) для любых точек X, Y, Z неверны; 3) верны для некоторых точек X, Y, Z:

а) $XZ \leq XY + YZ$; е) $YZ < 0$;

б) $XY \leq ZX + ZY$; ж) $YZ > 0$;

в) $YZ \geq XY + XZ$; з) $XZ - YZ > XY$;

г) $XZ > XY + YZ$; и) $XY + YZ \leq XZ$;

д) $XY = YX$; к) $XY = YZ = ZX$.

Задача 3.90. Расстояние от деревни A до деревни B по шоссе равно 3 км. В деревне A 100 школьников, в деревне B 50 школьников. На каком расстоянии от деревни A надо построить школу, чтобы общее расстояние, которое придется пройти всем 150 школьникам, было наименьшим?

Задача 3.91. Иванов мчался на своей машине по шоссе с постоянной скоростью. Рядом с ним в кабине сидела его дочь. «Ты заметила, — спросил он, — что деревья вдоль шоссе посажены на одинаковом расстоянии друг от друга? Хотелось бы знать, на каком именно?»

Дочь посмотрела на часы и сосчитала, сколько деревьев промелькнуло за окном в течение одной минуты. «Какое странное совпадение! — воскликнул Иванов. — Если это число умножить на 10, то получится в точности численное значение скорости нашей машины в километрах в час».

Предположим, что скорость машины постоянна, деревья посажены через одинаковые промежутки, а минута, отмеренная дочкой, начинается и кончается в моменты, когда машина находится как раз посреди расстояния, отдаляющего одно дерево от другого. Спрашивается, чему равно это расстояние?

Задача 3.92 (*марширующие курсанты и беспокойный терьер*). Курсанты военного училища построены в каре (квадрат со стороной 15 м) и маршируют с постоянной скоростью (рис. 3.17). Небольшой терьер, любимец роты, выбегает из середины последней шеренги (из точки A на рисунке 3.17) и устремляется по прямой к середине первой шеренги (к точке B). Достигнув цели, он поворачивается и снова бежит по прямой к середине последней шеренги. К моменту его возвращения в точку A курсанты успевают пройти ровно 15 м. Какое расстояние пробежал терьер, если предположить, что он двигался с постоянной скоростью, и пренебречь потерей времени при повороте?

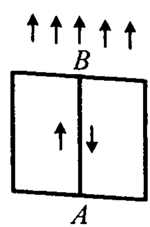


Рис. 3.17

Задача 3.93. Две точки P и Q движутся по двум прямым a и b, пересекающимся в точке O, с одинаковой постоянной скоростью v. Докажите, что в плоскости существует такая неподвижная точка A, расстояния от которой до точек P и Q в любой момент времени равны.

Задача 3.94. (*Столкнутся ли платформы*?) Из города A в город B ведут две дороги, каждая из которых не имеет самопересечений. Докажите, что если две машины M_1 и M_2 могут выехать одновременно из A по этим дорогам и проехать в B так, что расстояние между машинами ни в какой момент движения не будет превосходить 20 м (рис. 3.18), то две круглые платформы радиусом 11 м не смогут выехать одновременно из A в B и из B в A и проехать по этим дорогам не столкнувшись (рис. 3.19).

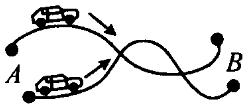


Рис. 3.18

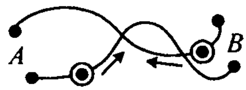


Рис. 3.19

Задача 3.95. (*Тропинка в лесу.*) На квадратном участке со стороной 100 м растут (цилиндрические) деревья радиуса 1. Докажите, что если на этом участке нельзя проложить (сколько угодно тонкую!) прямолинейную тропинку длиной 10, не задевающую ни одного дерева, то число деревьев на участке не менее 400.

Задача 3.96. (*Тысяча точек.*) Пусть A_1, A_2, ..., A_{1000} — какие угодно 1000 точек плоскости. Докажите, что на любой окружности радиуса 1 найдется точка M, сумма расстояний от которой до точек A_1, A_2, ..., A_{1000} не меньше 1000.

Задача 3.97. На плоскости даны 25 точек: известно, что из любых трех точек можно выбрать две, расстояние между которыми меньше 1. Докажите, что среди этих точек найдутся 13, которые можно покрыть кругом радиуса 1.

Задача 3.98. Дан выпуклый четырехугольник $ABCD$. Найдите в плоскости этого четырехугольника точку X, сумма расстояний от которой до вершин четырехугольника является наименьшей.

Задача 3.99. Может ли сумма расстояний от точки, лежащей внутри выпуклого четырехугольника, до всех его вершин быть больше его периметра?

Задача 3.100. На плоскости расположено N точек. Отметим все середины отрезков с концами в этих точках. Какое наименьшее количество точек плоскости может оказаться отмеченным?

3.6. РАССТОЯНИЕ МЕЖДУ ФИГУРАМИ

Основное теоретическое содержание

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 1. *Расстоянием от точки A до фигуры Φ называется расстояние от A до ближайшей к ней точки фигуры Φ, т. е. до такой точки B, что $AB < AM$ для любой точки M фигуры Φ, отличной от B.*

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 2. *Пусть мы имеем две фигуры Φ_1 и Φ_2. Если среди расстояний между точками, одна из которых принадлежит фигуре Φ_1, а другая — фигуре Φ_2, существует наименьшее, то его называют расстоянием между фигурами Φ_1 и Φ_2.*

Задачи

3.101. На рисунке 3.20 изображены два здания. Как вы будете измерять расстояние между ними?

3.102. Представьте себе две планеты в космосе, диаметр одной из них равен 1 000 000 км, а другой — 10 000 000 км. На сколько километров отличается расстояние между планетами от расстояния между центрами этих планет?

3.103. Расстояние от Земли до Солнца равно 150 млн. км, а до Луны — 400 тыс. км. Чему равно расстояние от Луны до Солнца во время: а) солнечного затмения; б) лунного затмения?

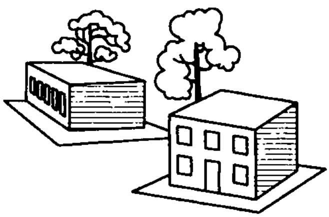


Рис. 3.20

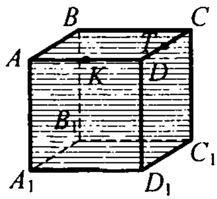


Рис. 3.21

3.104. Дан куб $ABCDA_1B_1C_1D_1$ (рис. 3.21), точки T и K — середины ребер CD и AD. Укажите расстояние от точки D: а) до плоскости грани ABB_1A_1; б) до отрезка CT; в) до отрезка KT; г) до ребра AB; д) до ребра BC; е) до прямой AC_1; ж) до прямой A_1C_1.

Глава 4
ЛОМАНАЯ

4.1. ПОНЯТИЕ ЛОМАНОЙ

Основное теоретическое содержание

ОПРЕДЕЛЕНИЕ. *Ломаной* $A_1A_2A_3 \dots A_n$ *называется фигура, которая состоит из точек* $A_1, A_2, A_3, \dots, A_n$ *и соединяющих их отрезков* $A_1A_2, A_2A_3 \dots, A_{n-1}A_n$. *Точки* $A_1, A_2, A_3, \dots A_n$ *называются вершинами ломаной, а отрезки* $A_1A_2, A_2A_3, \dots, A_{n-1}, A_n$ *— звеньями ломаной.* Точки A_1 и A_n называются соответственно *началом* и *концом ломаной.* При построении ломаной соседние звенья не должны лежать на одной прямой.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ. *Если начало и конец ломаной совпадают, то она называется замкнутой, в противном случае ломаная называется незамкнутой.*

Ломаная иногда может пересекать сама себя, т. е. не соседние по порядку звенья ломаной могут иметь общие точки. В этом случае ломаная называется *самопересекающейся,* или *непростой.* Если таких самопересечений нет, то ломаная называется *простой.*

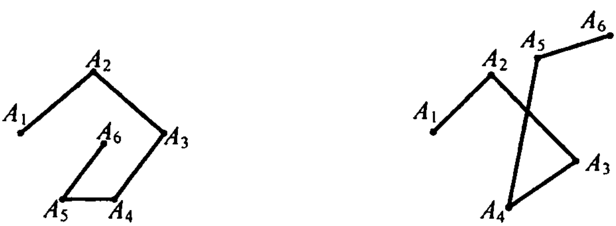
Термины и обозначения

Если в тексте написано «ломаная», то следует понимать, что она простая.

Задачи

4.1. На рисунке 4.1, *а, б* изображены две ломаные $A_1A_2A_3A_4A_5A_6$. Ответьте на вопросы:

1. Сколько вершин и звеньев имеют эти ломаные?
2. Какая из этих двух ломаных является простой?
3. Какие звенья ломаных имеют пересечения?

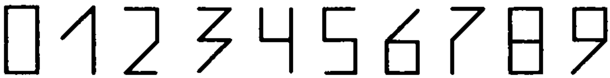


а) *б)*

Рис. 4.1

4.2. Приведите примеры ломаных из окружающей обстановки.

4.3. На рисунке 4.2, *а–к* изображены различные цифры, являющиеся объединением отрезков, т. е. ломаными. Какие из них являются простыми ломаными?



а) *б)* *в)* *г)* *д)* *е)* *ж)* *з)* *и)* *к)*

Рис. 4.2

4.4. Какие из фигур на рисунке 4.2, *а–к* являются простыми замкнутыми ломаными?

4.5. Какое наименьшее число звеньев может быть у замкнутой ломаной?

4.6. На рисунке 4.3 изображена замкнутая ломаная. Сколько у нее звеньев? Лежат ли все звенья в одной плоскости? Ответ обоснуйте.

4.7. На рисунке 4.4 изображен куб $ABCDA_1B_1C_1D_1$.

1. Назовите несколько ломаных, состоящих из ребер данного куба.

2. Всегда ли эти ломаные, составленные из ребер куба, лежат в одной плоскости?

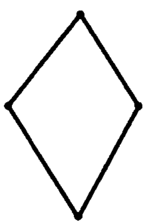


Рис. 4.3

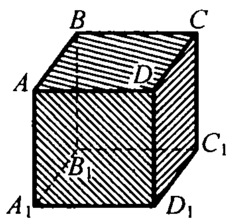
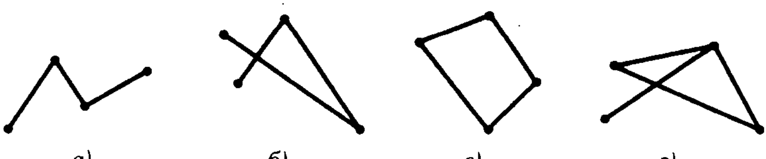


Рис. 4.4

4.8. На рисунке 4.5, *а–г* изображены различные фигуры, являющиеся объединением отрезков. Какие из этих фигур являются: а) простыми ломаными; б) простыми замкнутыми ломаными?



а) *б)* *в)* *г)*

Рис. 4.5

4.9. Изобразите в тетради точки так, как показано на рисунке 4.6, и постройте несколько простых ломаных, вершины которых находятся в этих точках.

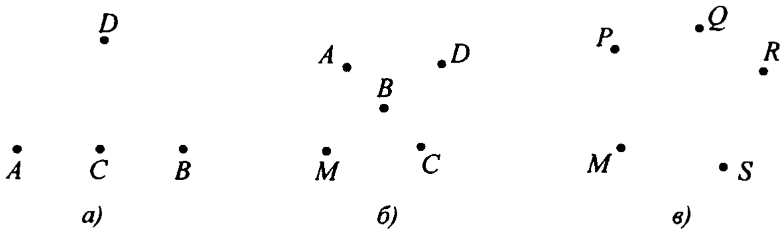


Рис. 4.6

4.10. В плоскости дана прямая *KH*. Постройте в этой плоскости ломаную, состоящую из *n* звеньев (n = 2, 3, 4, ...), так, чтобы прямая *KH* рассекала каждое из ее звеньев на два отрезка.

4.11. В полуплоскости с границей *l* даны две точки. Можно ли построить ломаную, соединяющую эти две точки и не пересекающую прямую *l*? Покажите это на рисунках. Ответьте на этот вопрос для случая, когда две точки находятся в разных полуплоскостях.

4.12. Покажите, что точки *C* и *M*, *A* и *B* можно соединить ломаной, не пересекающей данную окружность (рис. 4.7). Можно ли соединить такой ломаной точки *A* и *M*, *B* и *M*?

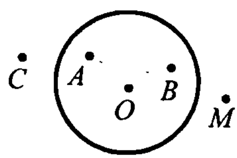


Рис. 4.7

4.13. Какое наименьшее число звеньев может иметь ломаная, два звена которой лежат на одной прямой? Начертите такую ломаную.

4.14. 1. Сколько существует двухзвенных ломаных, вершинами которых являются точки, изображенные на рисунке 4.6, *а–в*, а сторонами — отрезки с концами в этих точках?

2. Сколько таких трехзвенных ломаных?

4.15. Дан квадрат *ABCD*.

1) Покажите, что существуют 5 простых замкнутых ломаных, вершины которых — вершины этого квадрата.

2) Покажите, что существуют 20 простых незамкнутых ломаных, вершины которых являются вершинами квадрата $ABCD$.

4.16. Нарисуйте квадрат. Отметьте на нем 9 точек: вершин, середины сторон и точку пересечения диагоналей. Сколько ломаных соединяет две противоположные вершины квадрата? При этом каждая ломаная имеет вершинами только отмеченные точки, а ее звенья идут по сторонам квадрата или параллельно им.

4.17. Внутри квадрата отмечены 9 точек (рис. 4.8). Постройте четырехзвенную ломаную, проходящую через все точки. Сколько можно еще добавить точек, чтобы перечеркнуть все точки четырехзвенной ломаной при условии, что на каждом звене ломаной лежат не более четырех точек?

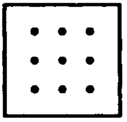


Рис. 4.8

4.18. Дан куб $ABCDA_1B_1C_1D_1$. Как из точки A, следуя вдоль ребер, можно попасть в точку C_1, не проходя два раза через одну и ту же вершину?

4.19. Жук ползает по ребрам куба. Сможет ли он последовательно обойти их, проходя по каждому ребру ровно один раз?

4.20. Сможете ли вы нарисовать: а) замкнутую семизвенную ломаную, которая пересекает свое звено два раза; б) замкнутую шестизвенную ломаную, которая каждое звено пересекает два раза; в) замкнутую ломаную, которая каждое звено пересекает один раз?

4.21. Какое наибольшее число точек самопересечения может быть у замкнутой ломаной из пяти звеньев? из семи звеньев? из любого нечетного числа звеньев? А если ломаная будет незамкнутой, изменится ли результат? Попробуйте решить задачу для ломаной, у которой четное число звеньев.

4.22. О некоторой ломаной известно: а) она замкнутая; б) каждое свое звено она пересекает ровно один раз; в) у нее шесть звеньев. Есть ли противоречие в этих данных? Если есть, то какое изменение нужно внести в исходную информацию, чтобы избежать противоречия?

4.23. Сможете ли вы сделать из гибкой проволоки замкнутую пятизвенную ломаную, имеющую: а) одну точку самопересечения; б) две точки самопересечения; в) три точки пересечения; г) четыре точки пересечения; д) пять точек пересечения?

4.24. У Димы есть кусок фанеры, расчерченный на 64 клетки (рис. 4.9). Он хочет сделать из этой фанеры шахматную доску. Как это можно сделать? (При этом хотелось бы, чтобы фанеру пришлось разрезать на небольшое количество частей, лучше всего на две.)

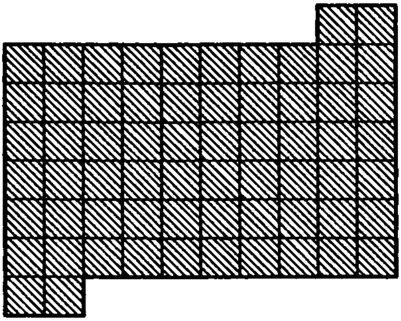


Рис. 4.9

4.26. Какое максимальное количество точек самопересечения может иметь замкнутая n-звенная плоская ломаная, если: а) n нечетно; б) n четно? (Предполагается, что никакие три вершины не лежат на одной прямой и что никакие три звена не пересекаются в одной точке.)

4.27. Каждая грань кубика разбита на 4 квадрата. Всякий отрезок, являющийся общей стороной двух из 24 полученных квадратов, окрашен в синий или красный цвет. Известно, что красных отрезков 26. Докажите, что на поверхности кубика найдется замкнутая ломаная линия, состоящая только из красных отрезков.

Т 4.28. О свойствах ломаных с равным количеством точек самопересечения на каждом звене.[1]

Введем дополнительное определение ломаных, называемых ломаными типа (n, m).

Ломаными типа (n, m), *где* $n \geq 3$, $m \geq 1$, *называют последовательности из n различных точек* A_1, A_2, ..., A_n *(вершин) и n последовательно соединяющих эти точки отрезков* A_1A_2, A_2A_3, ..., $A_{n-1}A_n$, A_nA_1 *(звеньев), таких, что каждое звено пересекают ровно т других звеньев, притом в т различных внутренних точках.* Например, на рисунке 4.10 показаны ломаные типов (5, 2), (6, 1), (9, 2).

[1] Задание составлено на основе материалов статьи в журнале «Квант», № 8, 1986.

1. Постройте, исходя из сформулированного определения, ломаные типов (0, 1), (5, 2), (9, 2).

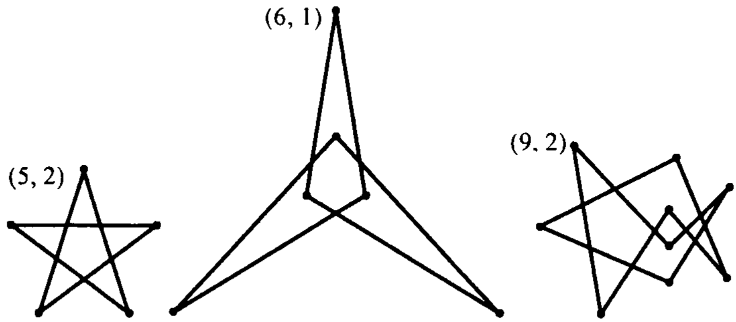


Рис. 4.10

2. При каких n существует ломаная типа (n, 1)?

3. Верно ли, что при всяком m существует (для некоторого n) ломаная типа (n, m)?

4. Для каких пар чисел (n, m) существует ломаная типа (n, m)?

4.2. ДЛИНА ЛОМАНОЙ

Основное теоретическое содержание

ОПРЕДЕЛЕНИЕ. *Длиной ломаной называется сумма длин ее звеньев.*

ТЕОРЕМА. (О длине ломаной). *Длина ломаной больше расстояния между ее концами.*

Задачи

4.29. На рисунке 4.11 изображена ломаная $ABCDE$ и указаны длины ее звеньев. Каким может быть расстояние между точками A и E?

4.30. Постройте ломаную $ABCD$, выполните необходимые измерения и вычислите ее длину.

4.31. На рисунке 4.9 изображен куб $ABCDA_1B_1C_1D_1$. Пусть длина ребра этого куба равна 1 см.

1. Постройте на этом кубе трехзвенную ломаную, составленную из ребер куба. Чему равна длина этой ломаной?

2. Постройте на этом кубе четырехзвенную ломаную, составленную из ребер куба. Чему равна длина этой ломаной?

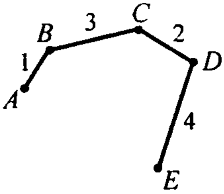


Рис. 4.11

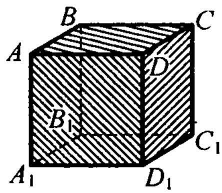


Рис. 4.12

4.32. Звенья ломаной $ABCD$ имеют длины: $AB = 1$ см, $BC = 2$ см, $CD = 3$ см. Может ли расстояние AD оказаться равным: а) 0,5 см; б) 6 см; в) 1 см; г) 7 см? Постройте такую ломаную, если это возможно.

4.33. Какую длину может иметь отрезок AB, концы которого соединены ломаной, имеющей звенья длиной: 1) 3 см, 2 см и 5,5 см; 2) 3 см, 4 см и 5 см? Ответ запишите в виде двойного неравенства.

4.34. Существует ли замкнутая ломаная, длины звеньев которой равны: 1) 2 см, 3 см, 4 см, 10 см; 2) 3 см, 3 см, 4 см, 4 см; 3) 4 см, 5 см, 0,5 см?

4.35. Докажите, что существует трехзвенная ломаная длиной $3a$, содержащая все вершины квадрата со стороной a. Докажите, что число звеньев и длину такой ломаной нельзя уменьшить.

4.36. Дан куб $ABCDA_1B_1C_1D_1$ (рис. 4.12). Длина его ребра 2 см. Может ли ломаная состоять из ребер куба и иметь пять звеньев? Всегда ли длина такой ломаной равна 10 см?

4.37. Докажите, что существует семизвенная ломаная длиной $7a$, содержащая все вершины куба с ребром a. Докажите, что число звеньев и длину такой ломаной нельзя уменьшить.

4.38. Докажите, что длина ломаной $AMTC$ больше длины ломаной ABC (рис. 4.13).

4.39. Докажите, что длина ломаной AMC больше длины ломаной $ATKC$ (рис. 4.14).

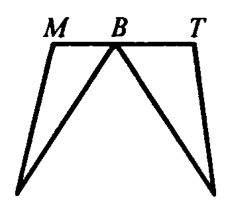


Рис. 4.13

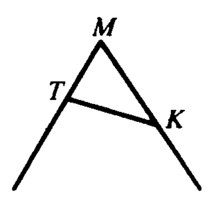


Рис. 4.14

4.40. Докажите, что длина ломаной ABC меньше длины ломаной AMC (рис. 4.15).

4.41. Докажите, что длина ломаной ABC меньше длины ломаной AMC (рис. 4.16).

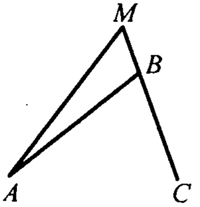


Рис. 4.15

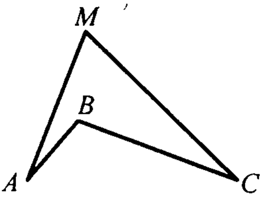


Рис. 4.16

4.42. Квадратный участок земли, сторона которого равна 40 м, состоит из 16 грядок. Для орошения участка между некоторыми грядками надо проложить трубу длиной 100 м. Эта труба должна разделить участок на две равные части. Покажите, как надо проложить трубу.

4.43. Из одного куска проволоки, не разрезая его, надо сделать каркас: а) треугольной пирамиды; б) четырехугольной пирамиды; в) куба. Предположим, что длина каждого ребра равна 1 см. Какова в этом случае наименьшая длина такой проволоки?

Глава 5
УГЛЫ И ИХ СВОЙСТВА

5.1. ЛУЧИ. НАПРАВЛЕНИЯ

Основное теоретическое содержание

Пусть на прямой a отмечена точка B. Эта точка разделяет прямую a на три части:

1) первая состоит из точек, лежащих левее точки B;

2) вторая состоит из самой точки B;

3) третья состоит из точек, лежащих правее точки B.

Объединение первого или третьего множеств с точкой B называют *лучом.*

Таким образом, точка B определила на прямой a два луча. Точка B называется *началом* каждого из этих лучей.

Лучи иногда называют *полупрямыми.* Точка B в этом случае называется *начальной точкой* полупрямой.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 1. *Лучи прямой a, на которые она разбивается точкой B, называют дополнительными.*

Рассмотрим геометрический смысл понятий *сонаправленные лучи* (лучи, имеющие одинаковые направления) и *противоположно направленные лучи* (лучи, имеющие противоположные направления).

Указанные понятия имеют отношение только к случаям, когда лучи принадлежат одной прямой или параллельным прямым.

1. Если два луча лежат на одной прямой, то будем считать их *одинаково направленными,* если один из них содержится в другом, и *противоположно направленными,* если один из них не содержится в другом.

2. Если два луча параллельны, то проведем через их начала прямую, которая разделит плоскость, задаваемую этими лучами, на две полуплоскости. Если лучи лежат в одной из этих полуплоскостей, то они сонаправлены. Если лучи лежат в разных полуплоскостях, то они противоположно направлены.

Если лучи не параллельны, то мы не будем их считать ни сонаправленными, ни противоположно направленными.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 2. *Направлением называется множество лучей, сонаправленных данному.*

Термины и обозначения

Лучи обозначаются строчными латинскими буквами a, b, m, n, ... или двумя прописными буквами, одна из которых обозначает начало луча, а вторая — какую-либо точку на луче.

Задачи

5.1. На прямой AB имеется точка C (рис. 5.1). Какие геометрические фигуры вы видите на этом рисунке?

5.2. На прямой a отметим две точки C и D (рис. 5.2). Назовите лучи с началами в точках C и D, которые имеются на этом рисунке.

5.3. На прямой отмечены три точки M, A, K (рис. 5.3). Сколько лучей с началами в этих точках вы можете назвать на этом рисунке?

Рис. 5.1

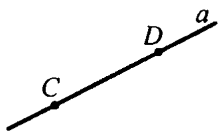


Рис. 5.2

Рис. 5.3

5.4. Даны две точки. Сколько различных направлений задают эти точки?

5.5. Сколько различных направлений существует на плоскости?

5.6. Как на прямой получить две полупрямые: а) с общим началом; б) с различными начальными точками?

5.7. Как могут быть расположены: а) два луча с общим началом; б) три луча с общим началом?

5.8. Всегда ли два луча с различными начальными точками лежат в одной плоскости?

5.9. Всегда ли три луча лежат в одной плоскости?

5.10. Сколько различных направлений можно задать в пространстве? Чем определяются эти направления?

5.11. О каких лучах можно сказать, что они: а) сонаправленные; б) противоположно направленные?

5.12. Могут ли вершины куба задавать одинаковые направления?

5.13. Могут ли вершины прямоугольного параллелепипеда задавать одинаковые направления?

5.14. На прямой MN отмечена точка O (рис. 5.4). Назовите дополнительные лучи на этом рисунке.

5.15. Сколько направлений вы видите на рисунке 5.4?

Рис. 5.4

5.16. Какой фигурой является пересечение лучей AK и KA?

5.17. Какой фигурой может являться: а) пересечение двух лучей, не лежащих на одной прямой; б) объединение двух лучей, лежащих на одной прямой?

5.18. Начертите в тетради прямую и отметьте на ней две точки A и B, находящиеся на расстоянии 5 см друг от друга. Сколько на луче AB находится точек, расположенных от точки A на расстоянии 3 см? Сколько на этом луче находится точек, расположенных от точки B на расстоянии 3 см? 6 см?

5.19. Запишите в принятых обозначениях: а) точка A принадлежит лучу a; б) луч l является частью луча p; в) точка M не принадлежит лучу a.

5.20. Сколько различных направлений задают на плоскости: а) две точки; б) три точки; в) четыре точки? Рассмотрите все возможные случаи расположения этих точек.

5.2. УГЛЫ И ИХ ИЗМЕРЕНИЕ

5.2.1. Понятие угла

Основное теоретическое содержание

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 1. *Углом называют фигуру, состоящую из двух различных лучей с общим началом и ограниченной ими части плоскости.* Точку, из которой выходят ограничивающие угол лучи, называют *вершиной угла*, а сами лучи — *сторонами угла.*

Посмотрим на рис. 5.5 на котором изображены два заштрихованых угла. Чем они отличаются друг от друга?

В геометрии есть понятия *выпуклые* и *невыпуклые фигуры*. Эти понятия помогут выделить нам нужный для рассмотрения угол.

а) *б)*

Рис. 5.5

а) б)

Рис. 5.6

Отметим две точки, принадлежащие углам и соединенные отрезками (рис. 5,6, *а, б*). Мы видим, что на рисунке 5.6, *а* отрезок принадлежит углу, а на рисунке 5.6, *б* — не принадлежит. Будем считать, что на рисунке 5.6, *а* изображен выпуклый угол, а на рисунке 5.6, *б* — невыпуклый.

Договоримся, что если мы произносим термин «угол», то мы рассматриваем тот угол, который является выпуклым.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 2. *Луч проходит между сторонами данного угла, если он исходит из его вершины и пересекает какой-нибудь отрезок с концами на сторонах угла.*

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 3. *Развернутым углом называют угол, сторонами которого являются дополнительные лучи одной прямой.*

Термины и обозначения

Слово «угол» иногда заменяют знаком «$\angle$». Часто при изображении угла чертят только выходящие из вершины участки его сторон, а ту часть плоскости, которую хотят указать, обозначают дужкой. Углы можно обозначать одной прописной буквой, поставленной у вершины угла, например $\angle A$, или тремя буквами, из которых одна ставится при вершине угла, а две другие — у каких-нибудь точек сторон, например, $\angle BAD$. Буква, стоящая при вершине угла, всегда записывается между двумя другими буквами. Иногда угол обозначают цифрой, поставленной внутри угла. Угол, сторонами которого являются лучи *a* и *b*, обозначают как $\angle(ab)$.

Задачи

5.21. На рисунке 5.7 изображены два луча *OA* и *OB* с общим началом — точкой *O*. а) Какие фигуры вы видите на этом рисунке? б) Сколько при этом получилось углов? Какой фигурой является объединение и пересечение получившихся углов?

5.22. Посмотрите на треугольную пирамиду (рис. 5.8). Сколько различных углов с вершинами в вершинах пирамиды задают лучи, вершины которых совпадают с вершинами пирамиды и которым принадлежат ребра этой пирамиды?

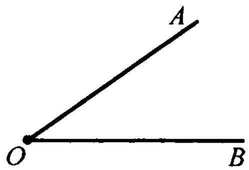


Рис. 5.7

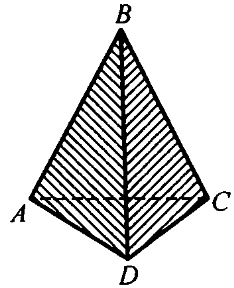


Рис. 5.8

5.23. У куба есть восемь вершин. Сколько различных углов определяют лучи, исходящие из этих вершин, которым принадлежат ребра куба?

5.24. Как надо расположить два луча, чтобы образовался угол? Сколько при этом образуется углов?

5.25. Сколько следует взять лучей с общим началом, чтобы получить: один угол? два угла? три угла?

5.26. «*Развернутым углом называется угол, стороны которого являются полупрямыми одной прямой*». Объясните, почему в определении развернутого угла два последних слова обязательны?

5.27. На рисунке 5.9 изображен развернутый угол. Является ли этот угол выпуклым?

5.28. На рисунке 5.10 изображены три луча *a*, *b* и *c*, имеющие общее начало. Сколько различных углов, образованных данными лучами, получилось? Укажите для каждой пары получившихся углов их пересечение и объединение. Объединение каких углов дает каждый угол?

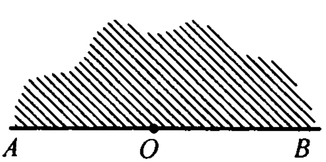


Рис. 5.9

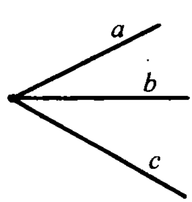


Рис. 5.10

5.29. 1. Нарисуйте угол с вершиной A. Из точки A внутри угла проведите: а) два луча; б) три луча. Сколько углов вы теперь видите на каждом рисунке?

2. Решите задачу для большего числа лучей.

5.30. Нарисуйте: а) два угла с общей вершиной; б) два угла с общей стороной; в) два угла, стороны которых лежат на двух данных прямых; г) два угла, лежащие так, что стороны одного пересекают стороны другого; д) углы ABC и ABD; е) углы ABC и BCM; ж) углы KMO, OMD и DMK.

5.31. На рисунке 5.11, *а–б* изображены два угла (они заштрихованы). Чем эти углы отличаются друг от друга? Придумайте способ, который бы однозначно фиксировал эти отличия.

а) *б)*

Рис. 5.11

5.32. На рисунке 5.12 изображены два угла — угол AOB и угол CMD. Закрасьте фигуру, которая является пересечением этих углов, и объясните, почему закрашенная фигура является пересечением данных углов.

5.33. Проведите через одну точку три прямые. Сколько при этом образовалось углов (рассматриваются углы с вершиной в точке пересечения прямых)?

5.34. Нарисуйте два угла так, чтобы: а) их пересечением и объединением были углы; б) угол получился только в пересечении; в) угол получился только в объединении; г) угол не получился ни в их пересечении, ни в их объединении.

5.36. Покажите на рисунке 5.13 объединение и пересечение углов: а) AOB и COD; 2) AOB и AOC.

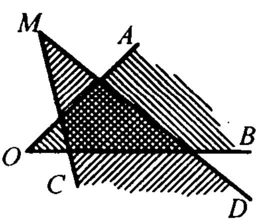


Рис. 5.12

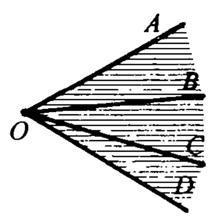


Рис. 5.13

5.36. Какие фигуры могут получиться: а) при пересечении двух углов, отличных от развернутого? б) При объединении таких углов?

5.37. Во внутренней области угла AOB дана точка M. Какой фигурой является множество таких точек X, что отрезок MX имеет общую точку хотя бы с одной стороной угла?

5.38. На какое наибольшее число различных частей, не имеющих общих точек, кроме своих границ, могут разбить плоскость угол и окружность?

5.2.2. Измерение углов

Основное теоретическое содержание

Процесс сравнения углов с углом, принятым за единицу измерения, называется *измерением углов.* Обычно за единицу измерения углов принимают *градус* — величину угла, равного 1/180 развернутого угла. В результате измерения углов находят их *градусные меры*. Градусную меру часто называют просто *величиной угла.* Величина угла, равного 1/60 градуса, называется *минутой;* 1/60 минуты называется *секундой.*

Так как градус равен 1/180 развернутого угла, то величина развернутого угла равна 180°.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 1. *Положительное число, которое показывает, сколько раз градус и его части укладываются в данном угле, называется величиной угла.*

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 2. *Угол, равный 90°, называют прямым. Угол, меньший 90°, называют острым. Угол, больший 90°, называют тупым.*

Можно сформулировать основные свойства измерения углов:

- *Каждый угол имеет определенную градусную меру больше (или равную) нуля.*
- *Развернутый угол равен 180°.*
- *Градусная мера угла равна сумме градусных мер углов, на которые он разбивается любым лучом, проходящим между его сторонами.*

Термины и обозначения

Градус обозначают знаком «°», минуту — знаком «′», секунду — знаком «″». Величина прямого угла часто обозначается знаком «d». Градусные меры угла обозначают так же, как сами углы, или буквами греческого алфавита. Например, запись $\angle AOB = 45°$ читается так: «величина (или градусная мера) угла AOB равна 45 градусам». Запись $\angle A = \alpha$ читается так: «величина угла A равна α». Запись $\alpha < 90°$ читается так: «величина угла меньше 90 градусов». Аналогично записываются и читаются величины прямого и тупого углов. Можно говорить: «величина угла равна 30 градусам» или «угол равен 30 градусам».

Задачи

5.39. Какие единицы измерения величины углов вы знаете?

5.40. Сколько углов, равных 60°, с вершиной в начале луча можно отложить от данной полупрямой?

5.41. Какое из следующих утверждений ошибочно:

а) угол, имеющий градусную меру 45° — острый;

б) угол, имеющий градусную меру 170° — острый;

в) угол, имеющий градусную меру 89° — тупой;

г) угол, имеющий градусную меру 50° — прямой;

д) угол, имеющий градусную меру 100° — тупой?

5.42. Между сторонами угла MOK проходит луч OA. $\angle MOA = 45°$, а $\angle AOK = 16°$ (рис. 5.14). Найдите величину угла MOK.

5.43. Луч OM проходит между сторонами угла AOK. Найдите угол AOK, если: а) $\angle AOM = 35°$, $\angle MOK = 75°$; б) $\angle AOM = 57°$, $\angle MOK = 62°$;
в) $\angle AOM = 94°$, $\angle MOK = 85°$.

5.44. Из вершины развернутого угла проведен луч, образующий с одной из его сторон угол 50° (рис. 5.15). Какой угол образует этот луч с другой стороной развернутого угла? Обоснуйте ответ.

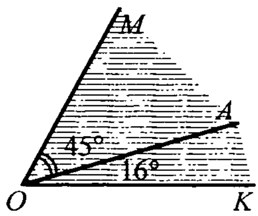


Рис. 5.14

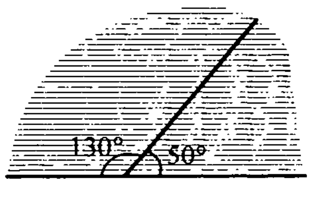
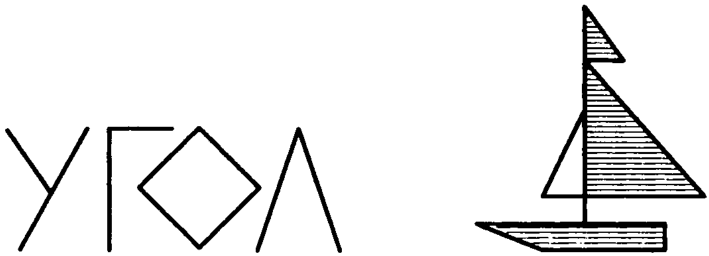


Рис. 5.15

5.45. Сколько на рисунке 5.16, *а–б* острых, тупых и прямых углов?



а) *б)*

Рис. 5.16

5.46. Сколько минут содержит величина угла, равного $4°$, $20°1'$, $22°$, $36°20'$, $100°$?

5.47. Сколько секунд содержит величина угла, равного $1°$, $10°$, $10°10'$, $2°20''$?

5.48. Запишите следующие градусные меры углов в порядке возрастания: $25°36'$; $25°36''$; $25°36'24''$; $25°36'40''$.

5.49. Выполните указанные действия над градусными мерами углов:

а) $25°36'24'' + 36°24'40''$;

б) $48°26' + 28°36'34''$;

в) $48°48'48'' - 24°36'36''$;

г) $3 \cdot 84°36'$;

д) $5 \cdot 18°36'18''$;

е) $144°50'22'' : 3$.

5.50. Какой угол образуют часовая и минутная стрелки часов, когда они показывают: а) 18 ч; б) 13 ч; в) 15 ч?

5.51. Найдите угол между часовой и минутной стрелками часов, если они показывают: а) 18 ч 15 мин; б) 9 ч; в) 9 ч 15 мин.

5.52. Между сторонами угла AOB, равного $78°$, проходит луч OC. Найдите величину угла AOC, если $\angle BOC = 18°$.

5.53. Может ли луч OC проходить между сторонами угла AOB, если: а) $\angle AOC = 30°$, $\angle COB = 80°$, $\angle AOB = 50°$; б) $\angle AOC = 100°$, $\angle COB = 90°$; в) $\angle AOC < \angle AOB$?

5.54. Между сторонами угла AOB, равного $60°$, проходит луч OC. Найдите углы BOC и AOC, если: а) угол AOC на $30°$ больше угла BOC; б) угол AOC в два раза больше угла BOC; в) луч OC делит угол AOB пополам; г) градусные меры углов AOC и BOC относятся как $2 : 3$.

5.55. Из вершины развернутого угла AOA_1 в одну полуплоскость проведены лучи OB и OC. Чему равен угол BOC, если:

а) $\angle AOB = 50°$, $\angle AOC = 70°$; б) $\angle A_1OB = 70°$, $\angle AOC = 70°$; в) $\angle AOB = 60°$, $\angle A_1OC = 30°$?

5.56. При помощи транспортира и линейки постройте углы, градусные меры которых равны: 36°; 78°; 90°; 136°. Постройте эти углы так, чтобы одна сторона у всех этих углов была общая.

5.57. С помощью транспортира отложите углы величиной 35° и 45° от данного луча.

5.58. Посмотрите на рисунки 5.17, *а–в*, на которых величины некоторых углов заданы. Найдите величину угла, у которого стоит знак вопроса.

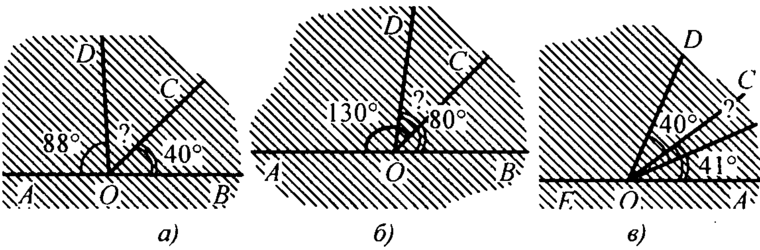


Рис. 5.17

5.2.3. Равенство углов. Биссектриса угла

Основное теоретическое содержание

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 1. *Углы называют равными, если равны их градусные меры.*

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 2. *Углы называют равными, если их можно совместить наложением друг на друга.*

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 3. *Биссектрисой угла называют луч, который исходит из вершины угла, проходит между его сторонами и делит угол пополам.*

Термины и обозначения

Равенство углов обозначается знаком «=». Запись «$\angle AOB = \angle COD$» читаем: угол AOB равен углу COD или величина угла AOB рана величине угла COD.

Задачи

5.59. На рисунке 5.18, *а* луч OC является биссектрисой угла AOB. Назовите равные углы на этом рисунке.

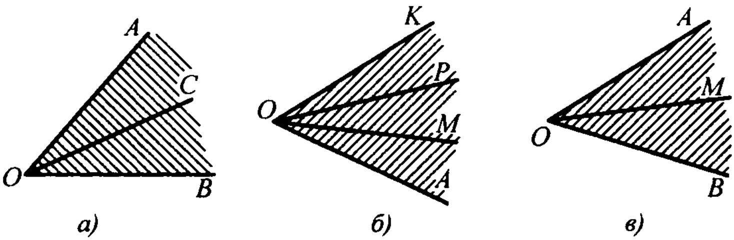


Рис. 5.18

5.60. Луч *OB* является биссектрисой неразвернутого угла *MOK*. Может ли угол *MOB* быть прямым или тупым?

5.61. На рисунке 5.18, *б OP* — биссектриса угла *KOM*, а *OM* — биссектриса угла *POA*. Будет ли угол *KOP* равен углу *AOM*? Объясните ответ.

5.62. Даны три луча *OA*, *OB*, *OC* с начальной точкой *O*. Известно, что $\angle AOB = \angle AOC = \angle BOC = 120°$.

Ответьте на вопросы:

1. Проходит ли какой-нибудь из этих лучей между сторонами угла, образованного двумя другими лучами?

2. Может ли прямая пересекать все три данных луча? Объясните ответ.

5.63. На рисунке 5.18, *в* изображена биссектриса *OM* угла *AOB*. $\angle AOM = 20°$. Чему равна величина угла *AOB*?

5.64. Разделите величины углов 45°; 90°; 75°; 201° на три равные части.

5.65. Чему равен угол между биссектрисой и стороной данного угла, равного: а) 30°; б) 52°; в) 172°?

5.66. Найдите угол, если его биссектриса образует со стороной угол, равный: а) 60°; б) 75°; в) 89°.

5.67. Чему равен угол между часовой и минутной стрелками: а) в *9 ч?* б) *17 ч?* в) *15 ч?* г) *16 ч 30 мин?* 1) Нарисуйте соответствующее расположение стрелок в каждом случае и вычислите угол без транспортира. 2) За какое время часовая стрелка повернется на 5°? На сколько градусов повернется минутная стрелка за это же время?

5.68. Докажите, что полупрямая, дополнительная к биссектрисе угла, образует с его сторонами равные углы.

5.69. Равные тупые углы со сторонами *a*, *b* и *a*, *c* соответственно отложены от полупрямой *a* в разные полуплоскости. Докажите, что луч *a* не является биссектрисой угла со сторонами *b* и *c*.

5.70. От полупрямой AB отложены два различных угла BAC и BAD с одной и той же градусной мерой. Пересекает ли прямую AB отрезок CD?

5.71. Однажды Феде понадобилось построить десять равных углов. Конечно, ему хотелось сделать это скучное задание побыстрее. Что бы вы ему посоветовали?

5.72. Как построить на земле угол, равный данному, если у вас в руках один кусок веревки?

5.73. Нарисуйте отрезок AB. Пусть из точки C он виден под некоторым углом ACB. Постройте другие точки, из которых он виден под таким же углом.

5.74. Отрезок AB виден из точки C под некоторым углом ACB. Нарисуйте отрезки, которые видны из точки C под тем же углом.

5.75. Постройте на листе бумаги выпуклый угол и вырежьте его по сторонам. Как вы думаете, можно ли без карандаша и линейки построить биссектрису этого угла? Как это сделать? Для всякого ли угла можно построить биссектрису?

5.76. Нарисуйте квадрат и проведите его диагональ. Как вы думаете, какие углы образует диагональ со сторонами квадрата? Проверьте свою интуицию измерением. Можете ли вы объяснить, почему угол именно такой? А если взять квадрат других размеров — больше или меньше, — изменится ли угол между сторонами квадрата? Вырежьте из бумаги квадрат и сложите его вдвое по диагонали. Что вы заметили?

5.2.4. Приложение углов и их измерений

Основное теоретическое содержание

С понятием угла и его величинами связаны такие понятия, как азимут, пеленг, курс судна. Эти понятия имеют широкое применение в науке и на практике.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 1. *Угол между направлением движения судна в море и направлением на север называют курсом судна.*

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 2. *Пеленгом предмета называют угол, вершина которого совпадает с точкой, из которой этот пеленг определяется, а сторонами являются направления на север и на предмет.*

Задачи

5.77. Может ли человек в карманном зеркальце увидеть себя во весь рост?

5.78. При каком условии вы можете увидеть: а) в озере отражение облака; б) в горизонтальном зеркале вертикальный предмет целиком?

5.79. Как можно определить направление на предмет?

5.80. Как можно понять слова: направление на предмет изменилось со 110° до 40°?

5.81. Самолет движется значительно быстрее поезда. Почему же мы, глядя в иллюминатор, видим медленно перемещающиеся под самолетом облака?

5.82. Самолет взлетает. Когда он разгоняется по взлетной полосе, за иллюминатором все быстрее и быстрее мелькают столбики, постройки, деревья. Вот самолет отрывается от поверхности земли — и почти сразу все эти постройки и деревья замедляют свое кажущееся перемещение. Неужели скорость самолета уменьшается?

5.83. Курс судна равен: а) 90°; б) 0°; в) 180°. Что означает эта информация?

5.84. Судно движется по меридиану в направлении на юг из точки A в точку B. Определите курс судна.

5.85. Из точки A маяк виден точно на востоке. Чему равен пеленг маяка?

5.86. Известно, что судно движется с запада на восток по прямой AB. Определите курс судна.

5.87. В результате повышения давления на 1 ат[1] стрелка манометра отклоняется вправо, описывая угол, равный 6°. Какой угол опишет стрелка манометра при увеличении давления на 8 ат?

5.88. Азимуты отсчитываются от направления на север по часовой стрелке от 0 до 360°. Например, азимут направления на маяк M — острый угол в 70°, а азимут ели E — угол в 260° (рис. 5.19).

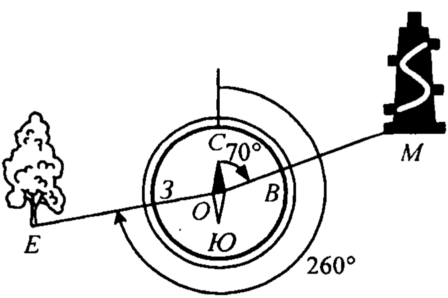


Рис. 5.19

[1] Атмосфера (ат) — единица измерения давления.

На рисунке 5.20 дана схематичная карта Подмосковья.

1. Определите азимуты направлений от Москвы на: а) Клин; б) Воскресенск; в) Каширу; г) Серпухов; д) Крюково; е) Можайск.

2. Чтобы определить по карте маршрут перехода, необходимо найти азимуты каждого из направлений этого маршрута. Сделайте это, используя карту Подмосковья (рис. 5.20), для маршрутов:

а) Кубинка — Малоярославец; б) Кубинка — Волоколамск; в) Крюково — Пушкино; г) Барыбино — Подольск.

Рис. 5.20

5.89. С помощью транспортира по рисунку 5.21 определите азимут строения *В* из точки *М*.

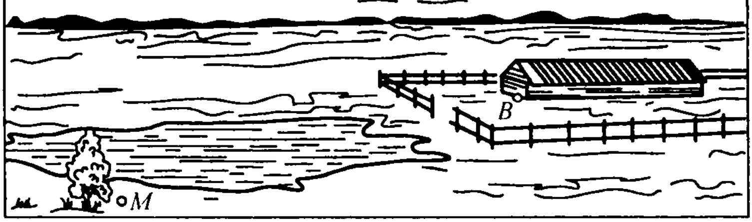


Рис. 5.21

5.90. На карте луч AB изображает направление движения судна, луч AC есть направление на маяк C (рис. 5.22). Найдите курсовой угол судна.

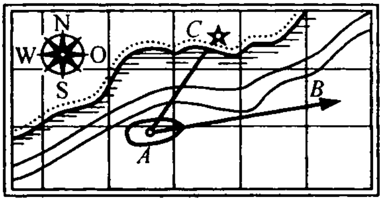


Рис. 5.22

5.91. Из точки M определили пеленг маяка A, равный 75°. Курс судна равен 140°. Определите курсовой угол.

5.92. Из точек A и B ученик определил азимуты озера C. Азимут из точки A равен 130°, а из точки B равен 75°. Определите местоположение озера на плане, если даны точки A и B плана, лежащие на одном меридиане, причем B южнее A.

5.93. На судне (точка M) штурман увидел маяк (точка A) и определил пеленг этого маяка. Нанесите на карту направление MA на маяк A, если пеленг маяка равен 120°. Точка M на карте дана.

5.94. Мальчику, стоящему у мельницы (точка M), известно, что азимут школьного лагеря равен 130°, а расстояние до него 800 м. Найдите местоположение лагеря (точка A).

Глава 6
ТРЕУГОЛЬНИКИ

6.1. ОПРЕДЕЛЕНИЕ ТРЕУГОЛЬНИКА

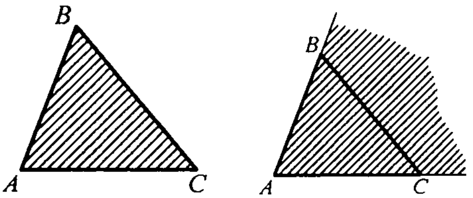
Основное теоретическое содержание

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 1. *Треугольником называется фигура, которая состоит из трех точек, не лежащих на одной прямой, трех отрезков, попарно соединяющих эти точки, а также части плоскости, ограниченной этими отрезками.* Указанные точки называются *вершинами* треугольника, отрезки — его *сторонами*, а часть плоскости — *внутренней областью* треугольника.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 2. *Периметром треугольника называется сумма длин его сторон.*

Пусть нам дан треугольник ABC (рис. 6.1, *а*). Рассмотрим вершину A и два луча AB и AC. Эти лучи с общим началом, как известно, задают два угла. Тот из углов, которому принадлежит сам треугольник ABC, называется *внутренним углом треугольника* (рис. 6.1, *б*).

В треугольнике ABC (рис. 6.2) против вершины A (или угла A) лежит сторона BC и, наоборот, против стороны BC лежит вершина A (или угол A). Про вершину A и угол A говорят, что они *противолежащие* стороне BC. О стороне BC также говорят, что она *противолежащая* вершине A и углу A. (Аналогично и для других углов и сторон треугольника.) Углы A и B в треугольнике ABC называют *прилежащими к стороне* AB, углы B и C — прилежащими к стороне BC, а углы C и A — прилежащими к стороне CA. Стороны и углы треугольника называют его *элементами*.



а) *б)*

Рис. 6.1

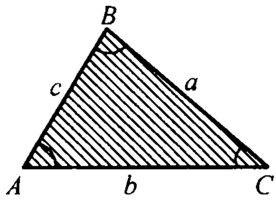


Рис. 6.2

ТЕОРЕМА. (Неравенство треугольника). *Для любых точек A, B и C, не принадлежащих одной прямой, расстояние AC меньше суммы расстояний AB и BC, т. е. $AC < AB + BC$.*

Термины и обозначения

Треугольник обозначают его вершинами. Вместо слова «треугольник» употребляется символ «Δ». Запись ΔPMK читается так: «треугольник PMK».

Когда говорят «сторона треугольника», допускают двойное толкование: либо это отрезок, соединяющий две вершины треугольника, либо длина этого отрезка. Из контекста должно быть ясно, о чем идет речь.

Аналогично поступают и при употреблении понятия «угол треугольника».

Для краткости внутренними углами треугольника называют и величины этих углов. Часто, говоря «угол треугольника», имеют в виду его внутренний угол.

Сторону, противолежащую вершине A, часто обозначают буквой a. Сторону, противолежащую вершине B, обозначают буквой b. Сторону, противолежащую вершине C, обозначают буквой c (рис. 6.2).

Задачи

6.1. Сколько вершин, сторон и углов имеет треугольник?

6.2. Назовите все стороны и углы треугольника, изображенного на рисунке 6.3.

6.3. В треугольнике ABC (рис. 6.3) для каждого угла назовите противолежащую сторону и для каждой стороны назовите противолежащий угол и прилежащие углы.

6.4. Всегда ли вершины треугольника лежат в одной плоскости? Обоснуйте ваш ответ.

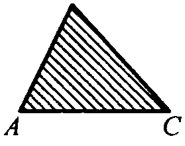


Рис. 6.3

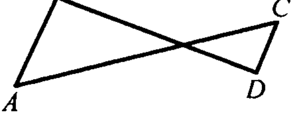


Рис. 6.4

6.5. Посмотрите на рисунок 6.4. Можно ли утверждать, что точки A, B, C и D обязательно лежат в одной плоскости? Проиллюстрируйте ваши выводы с помощью реальных моделей.

6.6. Может ли точка лежать вне треугольника и вне каждого из его углов?

6.7. Могут ли отрезки, имеющие длины 6, 7 и 9 см быть сторонами треугольника?

6.8. Сколько треугольников изображено на рисунке 6.5?

6.9. Назовите все треугольники на рисунке 6.6.

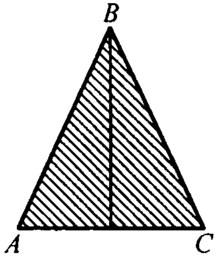


Рис. 6.5

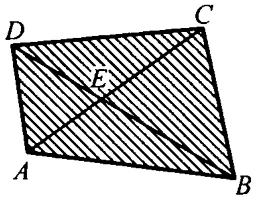


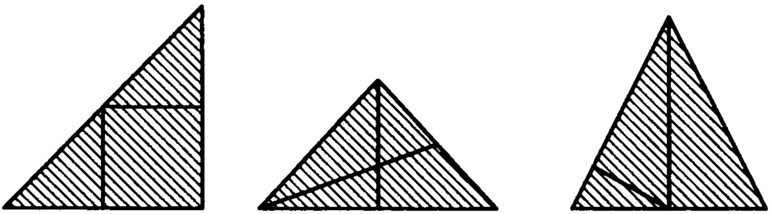
Рис. 6.6

6.10. Стороны треугольника равны 6, 7 и 9 см. Найдите периметр этого треугольника.

6.11. Каким может быть взаимное расположение треугольника и некоторой прямой? Рассмотрите все возможные случаи, сделайте рисунки.

6.12. Каким может быть взаимное расположение треугольника и некоторой плоскости?

6.13. Сколько треугольников изображено на рисунке 6.7, *а–в*?



а) *б)* *в)*

Рис. 6.7

6.14. Известно, что длины всех сторон некоторого треугольника равны целому числу сантиметров. Две стороны этого треугольника имеют длины 4 и 7 см. Какую длину может иметь третья сторона этого треугольника?

6.15. Одна из сторон треугольника равна 8 см, другая — 10 см. Третья сторона длиннее второй на 2 см. Найдите периметр треугольника.

6.16. Сторона *AB* треугольника *ABC* равна 5 см, сторона *BC* вдвое больше стороны *AB*, а сторона *AC* на 2 см меньше стороны *BC*. Найдите периметр треугольника.

6.17. В треугольнике ABC $AB + BC = 9$ см, $AC + BC = 13$ см, $AB + BC + AC = 17$ см. Найдите стороны треугольника.

6.18. Сумма первой и второй сторон треугольника равна 10 см. Сумма второй и третьей сторон равна 12 см. Сумма первой и третьей сторон равна 8 см. Найдите периметр треугольника.

6.19. Периметр треугольника равен 36 см. Стороны треугольника относятся как 2 : 3 : 4. Найдите длины его сторон.

6.20. Периметр треугольника равен 28 см, а одна из его сторон — 10 см. Найдите длины двух других его сторон, если их разность равна 2 см.

6.21. Периметр треугольника ABC равен 35 см; AB больше AC на 2 см, BC меньше AC на 3 см. Найдите стороны треугольника.

6.22. Начертите произвольный отрезок AB.

1. Постройте с помощью транспортира треугольник ABC, если: а) $\angle A = 45°$, $\angle B = 75°$; б) $\angle A = 30°$, $\angle B = 60°$. Измерьте угол C.

2. Найдите, сколько различных треугольников можно построить по этим данным?

6.23. На прямой a лежат 3 точки, точка B лежит вне прямой. Точку B соединили отрезками с точками на прямой. Сколько треугольников получилось на рисунке? Сколько будет треугольников, если на прямой взять 4, 5,..., n точек (n — натуральное число)?

6.24. Можно ли расположить на плоскости несколько треугольников так, чтобы две вершины каждого из них лежали на сторонах (но не в вершинах) других треугольников?

6.25. Внутри треугольника ABC взята точка M. Докажите, что длина ломаной AMB меньше длины ломаной ACB.

6.26. Докажите, что расстояние между любыми двумя вершинами замкнутой ломаной не больше половины суммы длин ее звеньев.

6.27. Можно ли треугольник разбить на более мелкие треугольники так, чтобы никакие два треугольника разбиения не имели общих (полностью совпадающих) сторон?

6.28. Каждые две из n точек (никакие три из них не лежат на одной прямой) соединены отрезком, и на всех отрезках расставлены стрелки. Треугольник ABC с вершинами в данных точках называется ориентированным, если стрелки расставлены в направлениях AB, BC, CA или AC, CB, BA.

1. Объясните, как расставить стрелки, чтобы не получилось ни одного ориентированного треугольника.

2. Какое наибольшее число ориентированных треугольников возможно (для каждого n)? (Нарисуйте соответствующие примеры для $n = 4$, 5 и 6.)

6.29. На рисунках 6.8, *а–к* даны треугольники, которые пересечены прямыми (отрезками). Сколько при этом получилось треугольников на каждом рисунке?

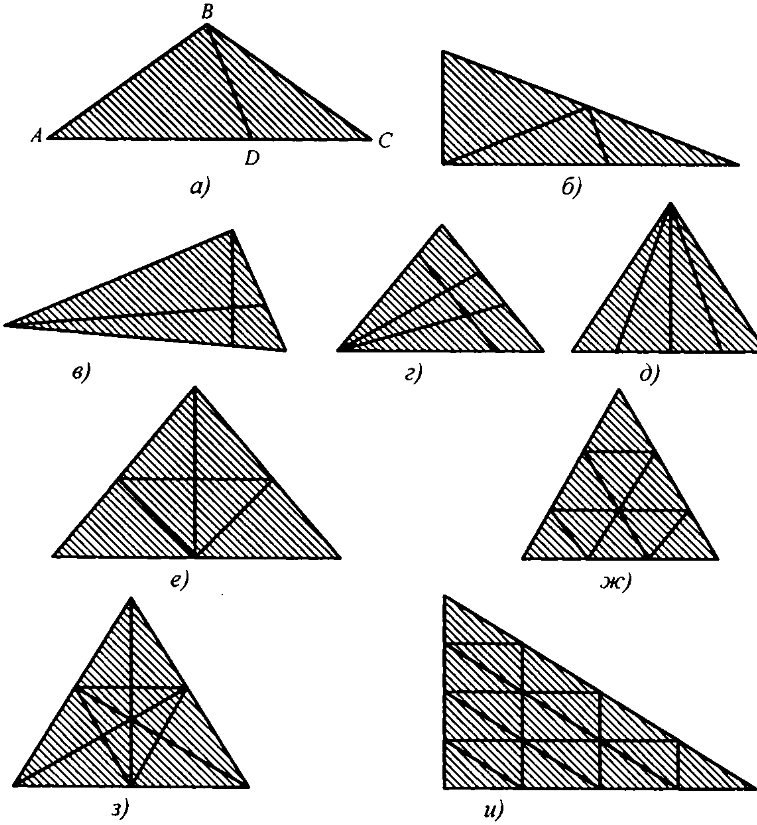


Рис. 6.8

6.30. Сколько треугольников на рисунке 6.9, *а*?

6.31. Сколько треугольников имеется на рисунке 6.9, *б*?

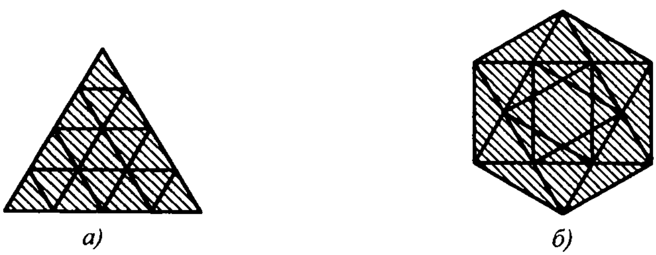


Рис. 6.9

6.32. Можно ли провести разрез произвольного треугольника так, чтобы получить два треугольника?

6.33. Можно ли провести разрез треугольника так, чтобы получить три треугольника?

6.34. Можно ли проведением двух разрезов треугольника получить три треугольника?

6.35. Можно ли провести два разреза треугольника так, чтобы получить четыре треугольника?

6.36. Как нужно провести два разреза треугольника, чтобы получить пять треугольников?

6.37. Можно ли двумя разрезами разбить треугольник на шесть треугольников?

6.38. Можно ли двумя разрезами разбить треугольник на семь треугольников?

6.39. Можно ли двумя разрезами разбить треугольник на 8 треугольников?

6.40. Какое количество треугольников можно получить при проведении трех разрезов данного треугольника?

6.2. ВИДЫ ТРЕУГОЛЬНИКОВ

Основное теоретическое содержание

В зависимости от величины углов различают три вида треугольников: *остроугольные, у которых все углы острые* (рис. 6.10, *а*); *прямоугольные, у которых один из углов прямой* (рис. 6.10, *б*); *тупоугольные, у которых один из углов тупой* (рис. 6.10, *в*).

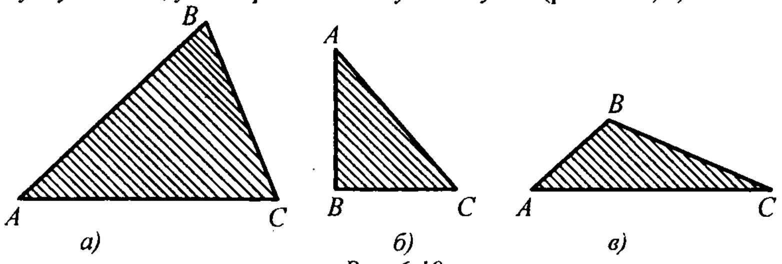


Рис. 6.10

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 1. *Треугольник называется равнобедренным, если у него две стороны равны.* Эти равные стороны называются *боковыми* сторонами, а третья сторона — *основанием* равнобедренного треугольника.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 2. *Треугольник, у которого все стороны равны, называется равносторонним, или правильным.*

Задачи

6.41. В равнобедренном треугольнике MPC MP — основание. Назовите равные стороны этого треугольника. Как они называются?

6.42. Нам дан равносторонний треугольник ABC. Назовите его равные стороны.

6.43. В треугольнике PKM угол P — прямой (рис. 6.11). Назовите: а) стороны, лежащие против углов P, K, M; б) углы, лежащие против сторон PK, KM, PM; в) углы, прилежащие к сторонам PK, KM, PM.

6.44. Является ли равносторонний треугольник равнобедренным? Вывод обоснуйте.

6.45. Может ли равнобедренный треугольник быть равносторонним?

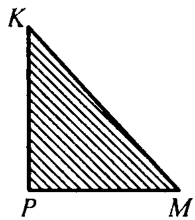


Рис. 6.11

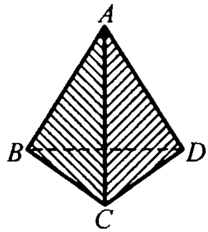


Рис. 6.12

6.46. В треугольной пирамиде, изображенной на рисунке 6.12 равны все боковые ребра. Какими треугольниками являются боковые грани этой пирамиды?

6.47. Назовите боковые стороны и основания у равнобедренных треугольников ABC и MNK (рис. 6.13, *а*, *б*).

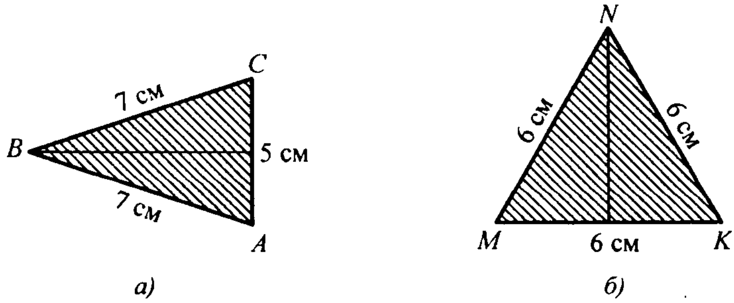


Рис. 6.13

6.48. Периметр равнобедренного треугольника равен 10 см, а основание — 4 см. Найдите длину боковой стороны.

6.49. Периметр равнобедренного треугольника равен 3 дм. Найдите длину каждой стороны треугольника, если одна из них равна 8 см.

6.50. В равнобедренном треугольнике основание в 2 раза меньше боковой стороны, а периметр равен 50 см. Найдите длины сторон треугольника.

6.51. Периметр равнобедренного треугольника равен 13 см. Найдите длины его сторон, если основание меньше боковой стороны на 2 см.

6.52. Основание равнобедренного треугольника в 3 раза меньше боковой стороны, а его периметр равен 21 см. Найдите длины сторон треугольника.

6.53. Из металлического прута нужно сделать деталь, имеющую форму равнобедренного треугольника. Одна из сторон треугольника должна иметь длину 250 см, а другая — длину 100 см. Какой должна быть длина l прута, чтобы это можно было сделать?

6.54. На рисунке 6.14 изображены треугольники. На глаз определите, есть ли среди них равнобедренные. Проверьте свой ответ с помощью циркуля.

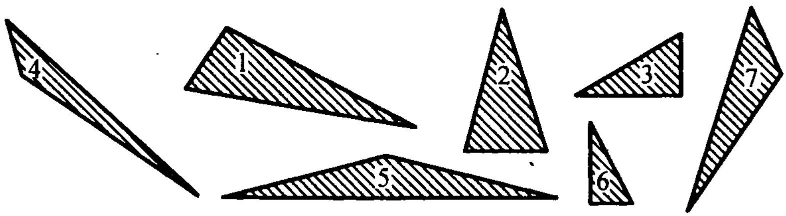


Рис. 6.14

6.55. Найдите на рисунке 6.15, *а* равнобедренные треугольники.

6.56. Найдите на рисунке 6.15, *б* равнобедренные треугольники. Назовите в каждом из них основание и боковые стороны.

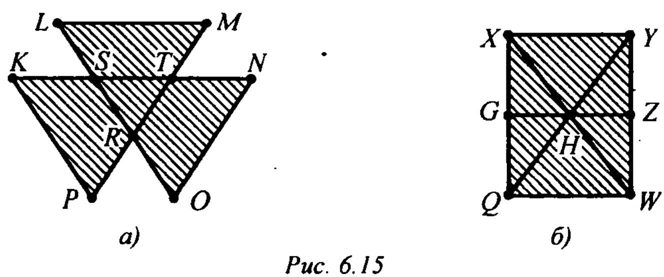


Рис. 6.15

6.57. Чему равна третья сторона равнобедренного треугольника, если две другие стороны: а) 5 см и 3 см; б) 10 см и 5 см; в) 11 см и 11 см. Всегда ли можно дать однозначный ответ на поставленный вопрос?

6.58. Обозначьте и выпишите обозначения всех изображенных на рисунках 6.16 треугольников. Сколько из них равнобедренных, сколько равносторонних? (На рисунке 6.16 изображен куб.)

6.59. К треугольнику, изображенному на рисунке 6.17, пристроили равнобедренный треугольник так, что получился новый треугольник. Сколькими способами это можно сделать?

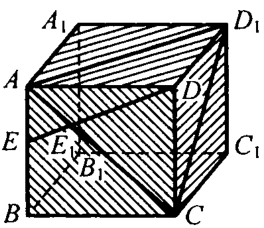


Рис. 6.16

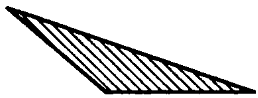


Рис. 6.17

6.60. Нарисуйте куб $ABCDA_1B_1C_1D_1$.

1. Постройте сечения куба в форме равностороннего треугольника.

2. Решите эту задачу, чтобы в сечении куба получить равнобедренные треугольники.

6.61. Сконструируйте равносторонний треугольник, используя: а) шесть спичек; б) девять спичек.

6.62. Сколько различных равносторонних треугольников с вершинами в данных точках можно получить на рисунке 6.18?

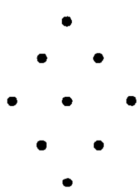


Рис. 6.18

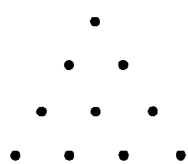


Рис. 6.19

6.63. Десять точек расположены так, как показано на рисунке 6.19. Сколько равносторонних треугольников можно построить, считая эти точки вершинами треугольников?

6.64. На рисунке 6.20 даны три равносторонних треугольника. Разделите эти три равносторонних треугольника следующим образом:

1-й — тремя линиями на шесть равных частей.

2-й — двумя линиями на четыре части.

3-й — тремя линиями на три равные части.

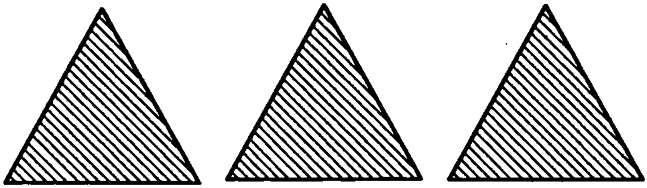


Рис. 6.20

6.65. Равносторонний треугольник можно разрезать на 4 равносторонних треугольника. Можно ли разрезать его на 10 равносторонних треугольников (все равными быть не должны)?

6.66. Попробуйте разделить равносторонний треугольник на различное число равных треугольников. Изобразите придуманные вами ситуации.

6.67. Из спичек сложена фигура, состоящая из 9 равных равносторонних треугольников (рис. 6.21). Уберите 5 спичек так, чтобы осталось 5 треугольников.

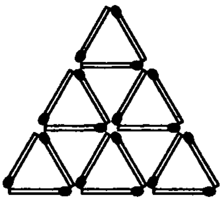


Рис. 6.21

Глава 7
ОКРУЖНОСТЬ И КРУГ

7.1. ОПРЕДЕЛЕНИЯ ОКРУЖНОСТИ И КРУГА

Основное теоретическое содержание

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 1. *Множество всех точек плоскости, одинаково удаленных от данной точки этой плоскости, называется окружностью.*

Данная точка называется *центром окружности.* Расстояние от любой точки окружности до ее центра называется *радиусом окружности.* Если продлить радиус окружности за точку O до пересечения с окружностью, то получим отрезок, называемый *диаметром окружности.*

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 2. Хордой окружности называется отрезок с концами, лежащими на данной окружности.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 3. *Множество всех точек плоскости, расстояние от которых до данной точки этой же плоскости не превосходящих данного расстояния, называется кругом.*

Для круга понятия радиуса, диаметра и хорды такие же, как и для окружности.

Граница круга есть окружность.

Термины и обозначения

Радиус окружности и круга обычно обозначают буквами r или R. Окружность с центром в точке O и радиусом r обозначают так: окр. (O; r), читаем так: «окружность с центром O и радиусом r». Круг с центром в точке O и радиусом r обозначают так: кр. (O; r), читаем так: «круг с центром O и радиусом r».

Радиусом окружности и круга называют также длину этих отрезков.

Задачи

7.1. Заполните пропуски.

Множество всех точек ..., находящихся на данном расстоянии от данной точки, называется ... .

7.2. Заполните пропуски.

Множество всех точек ..., расстояние от которых до данной точки не превосходит данного расстояния, называется ....

7.3. На рисунке 7.1 изображена окр. (0, 2) и несколько отрезков. Назовите радиус, хорды и диаметр этой окружности на данном рисунке.

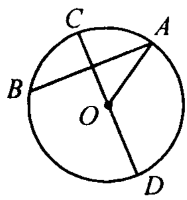


Рис. 7.1

7.4. 1) Принадлежит ли окружности ее центр? 2) Принадлежит ли кругу его центр?

7.5. Укажите, верны ли следующие утверждения:

а) все радиусы данной окружности равны;

б) радиус окружности является ее хордой;

в) хорда окружности содержит ровно две ее точки;

г) диаметр круга является его хордой;

д) хорда круга является его диаметром;

е) расстояние между двумя точками, лежащими на окружности, равно длине диаметра этой окружности.

7.6. Сколько радиусов имеет окружность?

7.7. Сколько диаметров имеет круг?

7.8. Сколько хорд можно провести в окружности?

7.9. Сколько диаметров можно провести из данной точки окружности?

7.10. Сколько хорд можно провести из данной точки круга?

7.11. Всякая ли хорда окружности является ее диаметром?

7.12. Диаметр круга равен 10. Чему равен радиус круга?

7.13. Радиус окружности равен 5 см. Чему равен диаметр окружности?

7.14. Построить 4 точки, отстоящие от данной точки O на 15 мм. Какую фигуру образуют все точки, отстоящие от O на 15 мм?

7.15. Постройте на листе бумаги окружность радиусом 3 см. Можно ли найти на этой окружности такие точки M и N, для которых: а) MN = 2 см; б) MN = 3 см; в) MN = 6 см; г) MN = 7 см? Отметьте на выполненном рисунке эти точки.

7.16. Построить окружность, радиус которой был бы равен 2 см и которая проходила бы через данную точку. Сколько таких окружностей можно построить?

7.17. Как начертить окружность для устройства круглой клумбы в саду?

7.18. Даны точки A и B, расстояние между которыми 26 мм. Постройте точку, находящуюся на расстояниях: 1) 15 мм от A и от B, 2) 13 мм от A и от B, 3) 12 мм от A и 21 мм от B, 4) 7 мм от A и 16 мм от B, 5) 6 мм от A и 14 мм от B.

7.19. Даны точка A и прямая BC. Постройте окружность с центром в точке A, пересекающую прямую BC. Сколько решений имеет задача?

7.20. Запишите с помощью знаков $\in$ и $\notin$: а) точка A не принадлежит окр. $(O; r)$; б) точка D принадлежит окр. $(O; r)$; в) точка L не принадлежит окр. $(O; r)$.

7.21. Нарисуйте окружность.

1. Отметьте на ней точку. Сколько можно провести через нее диаметров; хорд? Какая из этих хорд будет наибольшей; наименьшей?

2. Отметьте точку внутри нарисованной окружности. Сколько можно провести через нее диаметров? хорд?

7.22. Нарисуйте окружность.

1. Какую фигуру образуют середины всех ее радиусов?

2. Пусть A — ее центр, а B — точка на окружности. Какую фигуру образуют все точки X, такие, что $AX = 2AB$?

7.23. Отметьте некоторую точку. Нарисуйте фигуру, все точки которой удалены от этой точки на расстояние d (2 см $\leq d \leq$ 3 см). Как бы вы ее назвали?

7.24. Дана окр. $(O; r)$. Какую фигуру образует множество всех таких точек X плоскости, в которой лежит данная окружность, для которых: а) $OX < r$; б) $OX > r$; в) $OX \geq r$; г) $0 < OX \leq r$?

7.25. Построить в тетради фигуру, изображенную на рисунке 7.2.

7.26. Вырежьте из бумаги круг и перегибанием найдите его центр.

7.27. Ученик начертил окружность, радиус которой равен 30 мм, но забыл отметить центр ее. Как найти центр этой окружности?

7.28. Идет игра в снежки. Расстояние между Петей и Колей, стоящими на своих местах, 15 м. Петя может бросить снежок не далее чем на 18 м, а Коля — не далее, чем на 21 м. Изобразить в тетради (приняв сторону клеточки за 3 м), где должен находиться третий игрок Вася, чтобы: а) в него мог попасть снежком только Петя, б) только Коля, в) и Петя и Коля, г) ни Петя и ни Коля?

7.29. Даны прямые MN и PQ, пересекающиеся в точке O, и дан отрезок a. На прямых MN и PQ найдите точки, которые отстоят от точки O на расстоянии, равном длине отрезка a. Сколько имеется таких точек?

7.30. На окружности отмечены 10 точек (рис. 7.3). За один ход играющий проводит отрезок с концами в каких-либо двух из этих точек, но так, чтобы он не пересекал ранее проведенных отрезков. Играют двое, поочередно делая ходы. Тот, кто не может сделать ход, считается проигравшим. Кто выиграет при правильной игре: тот, кто делает первый ход, или второй играющий?

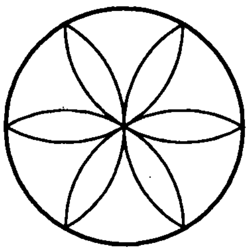


Рис. 7.2

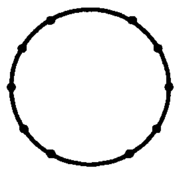


Рис. 7.3

7.31. Условимся считать «расстоянием» между точками A и B окружности длину дуги AB этой окружности, которая не превосходит полуокружности. Выполняются ли для таких «расстояний» на окружности основные свойства расстояний?

7.32. Аккуратно вырежьте из листа бумаги круг. Попробуйте, не перегибая его, найти центр круга.

7.2. ВЗАИМНОЕ РАСПОЛОЖЕНИЕ ПРЯМОЙ И ОКРУЖНОСТИ. ВЗАИМНОЕ РАСПОЛОЖЕНИЕ ОКРУЖНОСТЕЙ

Основное теоретическое содержание

Перечислим условия, определяющие все возможные случаи взаимного расположения прямой и окружности в зависимости от расстояния между центром окружности и прямой.

1). *Если расстояние от центра окружности до прямой больше радиуса, то прямая и окружность не имеют общих точек. При этом окружность лежит по одну сторону от прямой.*

2). *Если расстояние от центра окружности до прямой равно радиусу, то окружность имеет с прямой единственную общую точку, т.е. прямая касается окружности. В этом случае окружность лежит по одну сторону от прямой.*

3). *Если расстояние от центра окружности до прямой меньше радиуса, то прямая пересекает окружность ровно в двух точках. В этом случае прямая разбивает окружность на две части.*

Пусть мы имеем две окружности с радиусами r_1 и r_2, а расстояние между центрами этих окружностей равно h. Две окружности в зависимости от соотношений между h, r_1, r_2:

а) $h > r_1 + r_2$ — не имеют общих точек;

б) $h = r_1 + r_2$ — касаются внешним образом;

в) $r_1 - r_2 < h < r_1 + r_2$ — пересекаются в двух точках;

г) $h = r_1 - r_2$ — касаются внутренним образом;

д) $h < r_1 - r_2$ -- не имеют общих точек;

е) $h = 0$ — являются концентрическими.

Задачи

7.33. На рисунке 7.4 прямая AB пересекает окр. (O, r). Найдите равные расстояния на этом рисунке.

7.34. На рисунке 7.5 прямая AM имеет с кр. (O, r) одну общую точку M. Как называется эта прямая? Какой отрезок является радиусом круга?

7.35. На рисунке 7.6 две окружности с центрами O_1 и O_2 пересекаются в точках A и B. Найдите равные отрезки на этом рисунке.

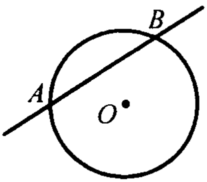


Рис. 7.4

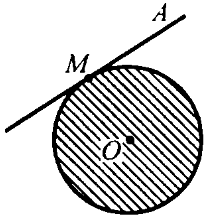


Рис. 7.5

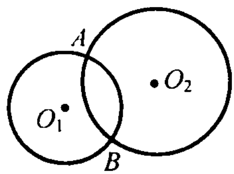


Рис. 7.6

7.36. При каком условии: а) прямая a касается окр. $(O_1; r)$? б) две окружности касаются друг друга внешним образом?

7.37. Как могут быть расположены по отношению друг к другу окружность и прямая; круг и прямая? Постарайтесь рассмотреть все возможные случаи расположения этих фигур. В каждом случае ответьте на вопросы:

1. Какой фигурой является пересечение указанных фигур?
2. Какой фигурой является объединение фигур?

7.38. Верны ли следующие утверждения?

1. Две окружности могут пересекаться ровно в трех точках.

2. Прямая может иметь с окружностью ровно одну общую точку.

7.39. Дана окр. $(O;\ r)$. Какую фигуру образует множество всех таких точек X плоскости, для которых:

а) $OX < r$; б) $OX > r$;

в) $OX \geq r$; г) $0 < OX \leq r$?

7.40. Каково взаимное расположение двух окружностей, если расстояние между их центрами равно 4 см, а радиусы соответственно равны: а) 1 и 3 см; б) 3 и 5 см; в) 2 и 1 см; г) 3 и 7 см; д) 1 и 4 см; е) 4 и 4 см?

7.41. Начертите окружность с центром в точке O и радиусом r и постройте точки, принадлежащие этой окружности и находящиеся на данном расстоянии d: а) от данной вне этой окружности точки M; б) от данной на этой окружности точки B. Сколько решений может иметь каждая из этих задач?

7.42. Постройте две окружности, каждая из которых проходит через центр другой. Сколько общих точек имеют эти окружности? Чему равно расстояние между их центрами?

7.43. Постройте точки, находящиеся на расстоянии a от данной точки A и на расстоянии b от другой данной точки B. При каком условии задача: а) имеет решение; б) не имеет решения?

7.44. Постройте окружность, которая касается данной окружности с центром в точке O и радиусом 2 см в данной точке и имеет радиус, равный: а) 1 см; б) 2 см; в) 3 см. Сколько окружностей можно построить в каждом из этик случаев?

7.45. Постройте окружность, которая: а) касается данной окружности с центром в точке O и радиусом r в данной на ней точке M; б) имеет радиус r_1 и касается данной окружности с центром в точке O_1, и радиусом r_1 в данной на ней точке M. Сколько решений может иметь эта задача?

7.46. Даны две окружности: окр. $(O_1;\ r_1)$ и окр. $(O_2;\ r_2)$, такие, что $r_1 > r_2$. Каким может быть расстояние между их центрами (точками O_1 и O_2), если известно, что: а) у этих окружностей есть общая точка; б) у этих окружностей есть две общие точки; в) эти окружности не имеют общих точек?

7.47. Прямая a пересекает окр. $(O;\ r)$ в точках A и B. Какую фигуру образует множество всех точек X этой прямой, для которых: а) $OX = r$; б) $OX \leq r$; в) $OX < r$; г) $OX \geq r$; д) $OX > r$; е) $OX \neq r$?

7.48. Окружности радиусов R и r ($R > r$) касаются друг друга. Докажите, что расстояние между их центрами равно либо $R + r$ (в случае внешнего касания), либо $R - r$ (в случае внутреннего касания). Сформулируйте и докажите обратное утверждение.

7.49. Окр. $(O_1; r_1)$ и окр. $(O_2; r_2)$ пересекаются в точках A и B ($r_1 \neq r_2$). Покажите на рисунке множества точек плоскости:

а) окр. $(O_1; r_1) \cup$ окр. $(O_2; r_2)$;

б) окр. $(O_1; r_1) \cap$ окр. $(O_2; r_2)$;

в) кр. $(O_1; r_1) \cup$ кр. $(O_2; r_2)$;

г) кр. $(O_1; r_1) \cap$ кр. $(O_2; r_2)$;

7.50. Через точку пересечения двух окружностей проведите прямую так, чтобы отрезки, отсекаемые на этой прямой окружностями, были равны.

7.51. Окр. $(O_1; r_1)$ и окр. $(O_2; r_2)$ имеют две общие точки P и T ($r_1 \neq r_2$). Покажите на рисунке, выполненном в тетради, множество всех таких точек X плоскости, для которых: а) $O_1X < r_1$, $O_2X < r_2$; б) $O_1X \geq r_1$, $O_2X \geq r_2$; в) $O_1X + O_2X > O_1O_2$.

7.52. Даны две окружности с центрами в точках O_1 и O_2 и радиусами r_1 и r_2, такими, что $r_1 > r_2$. Каким может быть расстояние O_1O_2, если известно, что у этих окружностей: а) есть общая точка; б) есть две общие точки; в) нет общих точек?

7.53. Расстояние от пункта A до пункта B равно 20 км, а от пункта B до пункта C — 12 км. Каким может быть расстояние от пункта A до пункта C? Для случаев, когда это расстояние принимает наибольшее или наименьшее из возможных значений, сделайте рисунок, приняв расстояние в 1 км за 1 см.

7.54. Три походные радиостанции поддерживают между собой связь, если расстояние между ними не превышает 10 км. Две из этих радиостанций расположились в пунктах A и B, расстояние между которыми равно 9 км. Приняв расстояние в 1 км за 1 см, сделайте рисунок, отметьте точки A и B. Определите на рисунке точки, в которых может расположиться третий пункт с радиостанцией так, чтобы поддерживать связь: а) с каждой из радиостанций; б) хотя бы с одной из этих радиостанций.

7.55. Две окружности радиусом r касаются. Кроме того, каждая из них касается извне третьей окружности радиусом R в точках A и B соответственно. Вычислите радиус r, если $AB = 12$ см, $R = 8$ см.

7.56. Через общую точку A двух окружностей с центрами O_1 и O_2 проведена прямая, пересекающая эти окружности в точках M

и N. Докажите, что $\angle O_1MB = \angle O_2NB$, где B — вторая общая точка окружностей.

7.57. Даны три окружности: окр. $(O_1;\ r_1)$, окр. $(O_2;\ r_2)$, окр. $(O_3;\ r_3)$. Выразите расстояния O_1O_2, O_2O_3 и O_1O_3 через радиусы r_1, r_2, r_3.

7.58. Известно, что шесть кругов имеют общую точку. Докажите, что хотя бы один из них содержит центр некоторого другого круга.

7.59. Из пяти окружностей каждые четыре имеют общую точку. Докажите, что все пять окружностей имеют общую точку.

7.60. Докажите, что если окр. $(O_1;\ r_1)$ и окр. $(O_2;\ r_2)$ касаются друг друга, то точка касания принадлежит прямой, проходящей через центры этих окружностей.

7.61. Постройте окружность, которая касается двух данных концентрических окружностей. Какой фигурой является множество центров всех таких окружностей?

7.62. Дан треугольник ABC. На сторонах его взяты точки: D и E на AB, F на AC, G на BC. При этом $AD = AC$, $BE = BC$, $AE = AF$, $BG = BD$. Докажите, что точки C, D, E, F, G лежат на одной окружности.

7.63. В плоскости даны угол, окружность с центром O и две не принадлежащие ей точки A и B. Постройте такую хорду A_1B_1 окружности, чтобы прямые A_1A и B_1B были параллельны, а угол A_1OB_1 равен данному.

7.64. Одиннадцать кружочков расположены на плоскости так, как показано на рисунке 7.7. Можно ли раскрасить их тремя различными красками так, чтобы никакие два соседних (касающихся друг друга) кружочка не были одного цвета? Ответ обоснуйте.

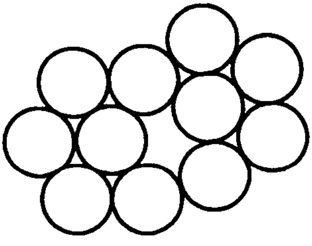


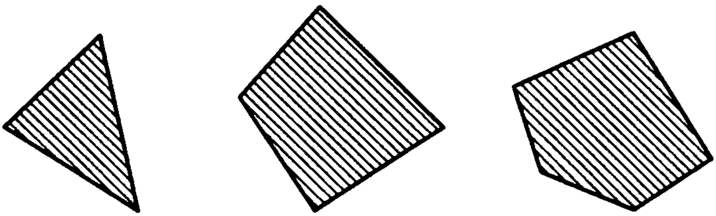
Рис. 7.7

Глава 8
КВАДРАТ И ПРЯМОУГОЛЬНИК

8.1. КВАДРАТ

Основное теоретическое содержание

В геометрии широко используется понятие «*многоугольник*». Существуют разные многоугольники: треугольники (рис. 8.1, *а*), четырехугольники (рис. 8.1, *б*), пятиугольники (рис. 8.1, *в*) и т.д.



а) *б)* *в)*

Рис. 8.1

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 1. *Квадрат — это четырехугольник, у которого все стороны равны и все углы прямые.*

Из этого определения и из наглядных представлений можно назвать основные свойства квадрата:

а) все стороны равны;

б) все углы прямые;

в) противоположные стороны параллельны;

г) смежные стороны пересекаются.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 2. *Отрезки, соединяющие противоположные вершины квадрата называются его диагоналями.*

Термины и обозначения

Стороны и углы квадрата можно понимать и как геометрические фигуры, и как соответствующие им величины. Можно говорить так: «сторона квадрата равна 2 см» или «длина стороны квадрата равна 2 см».

Задачи

8.1. Какая из фигур, изображение на рисунке 8.2 является квадратом? Назовите стороны и вершины этого квадрата, сравните длины сторон квадрата. Какой вывод вы можете сделать?

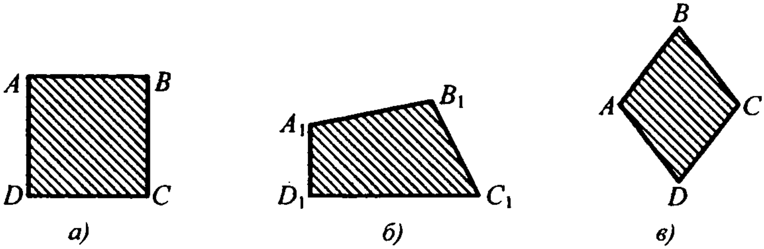


Рис. 8.2

8.2. а) Сколько диагоналей имеет квадрат;

б) На какие фигуры диагональ делит квадрат?

8.3. Есть ли среди сторон квадрата, стороны, лежащие на пересекающихся прямых? на параллельных прямых?

8.4. Сколько треугольников получится, если в квадрате провести две диагонали?

8.5. Сосчитайте сколько квадратов на рисунке 8.3?

8.6. В квадрате, изображенном на рисунке 8.4 проведено 4 разреза, параллельные сторонам квадрата, при этом сторона квадрата делится на равные отрезки. Сколько получилось квадратов?

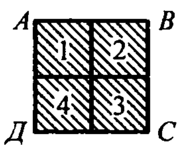


Рис. 8.3

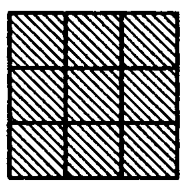


Рис. 8.4

8.7. На рисунке 8.5, *а–в* изображены составленные из спичек различные фигуры.

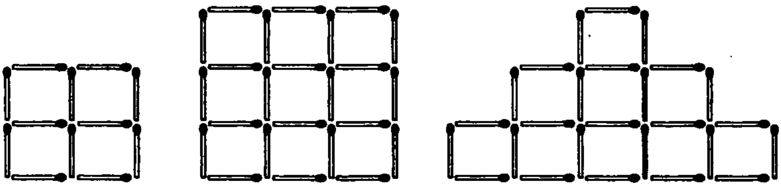
1) На рисунке 8.5, *а* уберите две спички так, чтобы осталось только два квадрата.

2) На рисунке 8.5, *б* уберите восемь спичек так, чтобы осталось только два квадрата.

3) На рисунке 8.5, *б* убрать шесть спичек так, чтобы осталось три квадрата.

4. На рисунке 8.5, *б* убрать восемь спичек так, чтобы осталось четыре равных квадрата.

5) На рисунке 8.5, *в* убрать десять спичек так, чтобы осталось четыре равных квадрата.



а) *б)* *в)*

Рис. 8.5

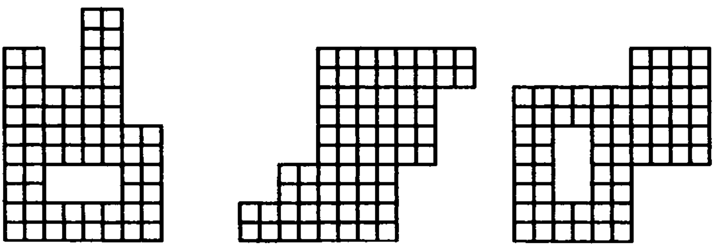
8.8. Можно ли составить квадрат из двух треугольников? из трех? из четырех треугольников?

8.9. Имеется 9 палочек различной длины: 1, 2, ..., 9 см. С какими сторонами и сколькими способами можно составить квадраты из этих палочек?

Указание. Все палочки использовать не обязательно; способы составления одного и того же квадрата считаются разными, если использованы разные наборы палочек.

8.10. Разрежьте квадрат на части, из которых можно составить квадратную рамку.

8.11. Каждую из трех фигур, изображенных на рисунке 8.6, *а–в*, разрежьте на две части таким образом, чтобы из них можно было составить квадрат.



а) *б)* *в)*

Рис. 8.6

8.12. Разрежьте «елочку» (рис. 8.7) на 4 части так, чтобы из них можно было сложить квадрат.

8.13. Разрежьте «квадрат с дыркой» (рис. 8.8, *а*) двумя прямыми таким образом, чтобы из них и второго квадрата (рис. 8.8, *б*) можно было сложить новый квадрат.

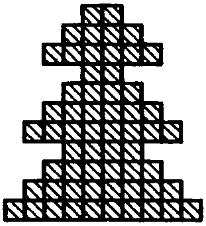
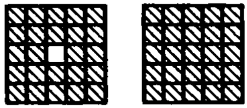


Рис. 8.7



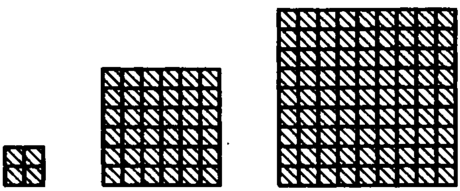
а) *б)*

Рис. 8.8

8.14. Разрежьте большой квадрат (рис. 8.9, *в*) на 3 части так, чтобы из них и двух других квадратов (рис. 8.9, *а, б*) можно было сложить один квадрат.

8.15. Диагональ квадрата со стороной 2 см служит стороной другого квадрата. Вычислите диагонали второго квадрата.

8.16. На рисунке 8.10 квадрат разбит на части шестью разрезами. Сколько квадратов имеется на рисунке 8.10?



а) *б)* *в)*

Рис. 8.9

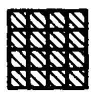


Рис. 8.10

8.17. Можно ли покрыть всю плоскость квадратами с длинами сторон 1, 2, 4, 8, 16 ... без наложений, используя каждый квадрат не более: а) десяти раз; б) одного раза?

8.18. Сколько квадратов нужно взять, чтобы сложить другой квадрат, сторона которого в два раза больше стороны данного; в три раза больше стороны данного квадрата?

8.19. Как разрезать квадрат 4×4 прямыми линиями так, чтобы из полученных частей можно было составить 32 равных квадрата? Не разрешается оставлять неиспользованные части, а также накладывать их друг на друга.

8.20. Бумажный квадрат требуется разрезать на несколько более мелких квадратиков, не обязательно одинаковых. Каким может быть их количество?

8.21. Если разрезать квадрат, как показано на рисунке 8.11, *а*, получится популярная китайская головоломка «**Танграм**». Суть игры состоит в том, чтобы из 7 частей, на которые разрезан квадрат, составить различные фигуры.

Эта игра появилась в Китае в конце XVIII века. Название «танграм» возникло в Европе, скорее всего, оно происходит от японского слова «тань» (китаец) и греческого корня «грамма» (буква).

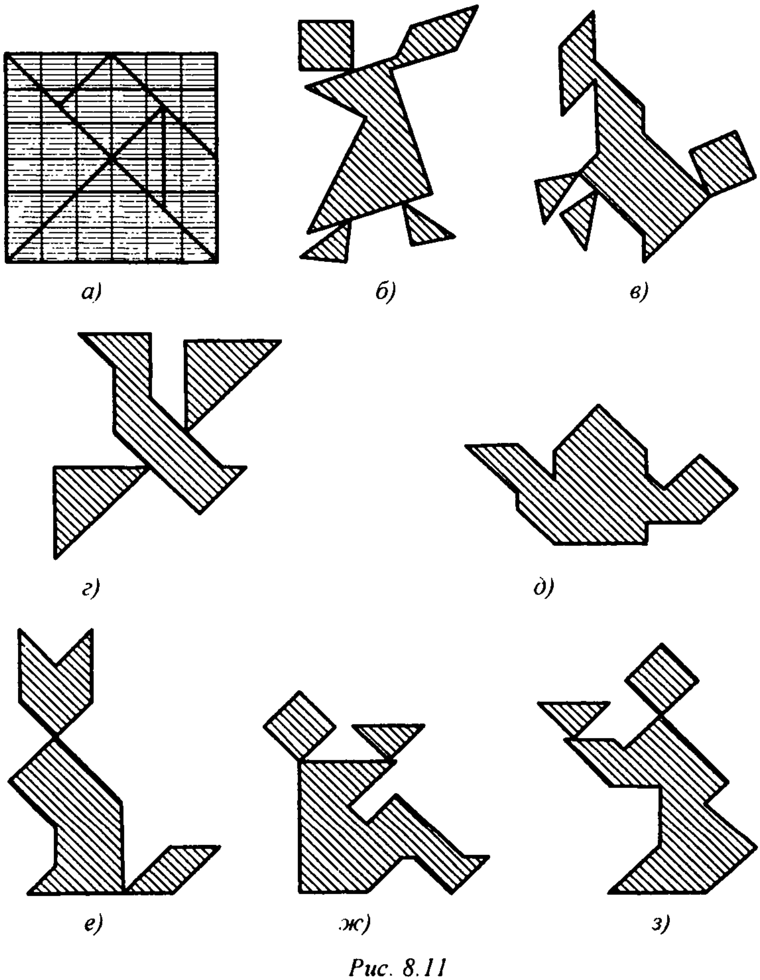
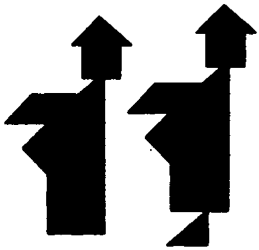


Рис. 8.11

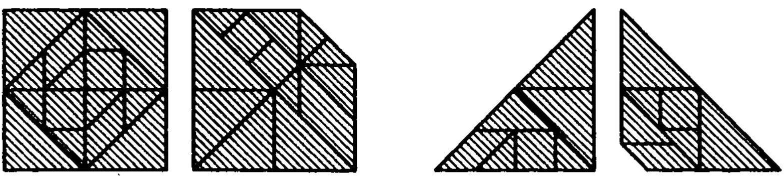
1. Попытайтесь сложить фигурки, изображенные на рисунке 8.11, *б–з*.

2. Попробуйте из полного комплекта танграма составить все возможные выпуклые многоугольники (в 1942 году было доказано, что их ровно 13).

3. На рисунке 8.12 показаны парадоксы «Танграма». Как объяснить исчезновение ноги у «человека с подносом» (рис. 8.12, *а*), если для составления обеих фигурок использовался полный комплект танграма? На рисунке 8.12, *б* вы видите два квадрата, составленные из двойных комплектов танграма. Как объяснить, что у второго квадрата не хватает уголка? На рисунке 8.12, *в* изображен аналогичный «софизм» для треугольников.



а)



б) *в)*

Рис. 8.12

8.22. Свойства квадрата лежат в основе многих интересных задач с общим названием «*Разбиение квадрата на квадраты*».

1. На рисунке 8.13 показано одно из возможных разбиений квадрата. Постарайтесь найти закономерность сложения нечетных чисел. Чему равна сумма нечетных чисел от 1 до $2n - 1$?

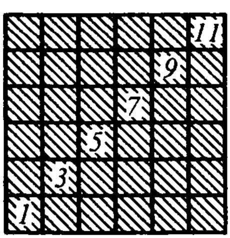


Рис. 8.13

2. Квадрат можно разбить на квадраты меньших размеров, например, средними линиями, как на рисунке 8.14. На рисунке 8.15 вы видите более сложное разбиение квадрата на меньшие квадраты с целочисленными сторонами. Найдите их размеры, если известно, что длина стороны темного квадратика равна 1. Обратите внимание на то, что не все квадраты имеют разный размер.

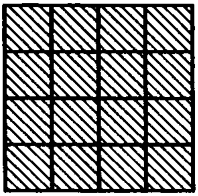


Рис. 8.14

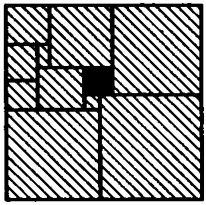


Рис. 8.15

3. Долгое время математики полагали, что разбить квадрат на неравные квадраты невозможно. В 1939 году было впервые построено разбиение квадрата на 55 различных квадратов. В 1940 году были найдены два способа разбиения квадрата на 28 различных квадратов, а затем — на 26 квадратов. В 1948 году было получено разбиение квадрата на 24 различных квадрата. В 1978 году квадрат был разбит на 21 различный квадрат. Разбиение квадрата на меньшее число равных квадратов уже невозможно. Попробуйте повторить достижения ученых по разбиению квадрата.

8.2. ПРЯМОУГОЛЬНИК

Основное теоретическое содержание

ОПРЕДЕЛЕНИЕ. *Прямоугольником называется четырехугольник, у которого все углы прямые, а стороны попарно равны.*

Из определения прямоугольника и из наглядных соображений можно сформулировать следующие свойства прямоугольника:

а) противоположные стороны равны;

б) все углы прямые;

в) противоположные стороны параллельны;

г) смежные стороны пересекаются.

Термины и обозначения

Прямоугольник обозначается названиями его вершин. Прямоугольник с вершинами *A, B, C* и *D* обозначается *ABCD*.

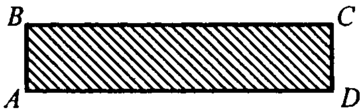


Рис. 8.16

Задачи

8.23. На рисунке 8.16 изображен прямоугольник. Сколько у него сторон, углов и вершин? Чему равна величина его углов? Какие стороны прямоугольника равны между собой?

8.24. Какими особыми свойствами обладает прямоугольник по сравнению с квадратом?

8.25. Есть ли среди сторон прямоугольника, стороны, лежащие на пересекающихся прямых? на параллельных прямых?

8.26. Сколько диагоналей можно провести в прямоугольнике? Проведите эти диагонали. Сравните «на глаз» или с помощью циркуля длины диагоналей. Какой вывод вы можете сделать?

8.27. Сколько треугольников получится, если в прямоугольнике провести две диагонали?

8.28. Постройте четырехугольник, имеющий два прямых угла, но не являющийся прямоугольником.

8.29. Постройте четырехугольник, диагонали которого равны между собой, но он не является прямоугольником.

8.30. Нарисуйте прямоугольник. Вырежьте его по контуру. Проведите в прямоугольнике диагональ. Сколько треугольников вы получили? Разрежьте прямоугольник по диагонали. Какие фигуры вы получили? Попробуйте наложить эти фигуры одну на другую. Какой вывод вы можете сделать?

8.31. Прямоугольник *ABCD* разделен на части прямыми $KM \| AD$ и $OP \| AB$ (рис. 8.17). Сколько получилось разных прямоугольников?

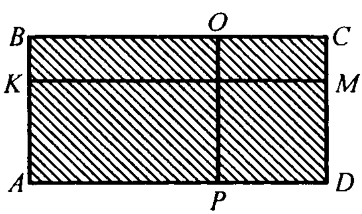


Рис. 8.17

8.32. Сколько прямоугольников имеется на рисунке 8.18?

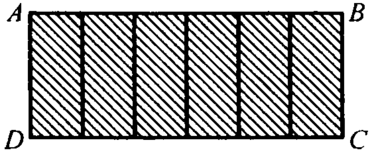


Рис. 8.18

8.33. Сколько всего квадратов изображено на рисунке 8.19?

8.34. Сосчитайте квадраты на рисунке 8.20?

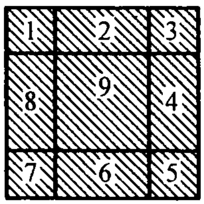


Рис. 8.19

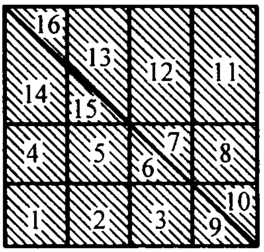


Рис. 8.20

8.35. Можно ли прямоугольник 35×23 клетки разрезать без остатка на прямоугольники размером 8×9? Если можно, то как? Если нет, то почему?

8.36. Кусок бумаги имеет форму прямоугольника, одна сторона которого равна четырем, а другая — девяти единицам длины (рис. 8.21). Разрежьте этот прямоугольник на две равные части так, чтобы, сложив их определенным образом, получить квадрат.

8.37. Имеется три квадрата: 3×3, 6×6, и 6×6. Разрежьте каждый из квадратов на две части и сложите из всех шести частей квадрат.

8.38. Фигура *ABCDEF* (рис. 8.22) состоит из трех равных квадратов. Требуется разрезать эту фигуру на 2 части так, чтобы из образовавшихся частей можно было составить квадратную рамку. Отверстие внутри рамки должно тоже иметь квадратную форму, равную каждому из трех квадратов, составляющих данную фигуру.

8.39. Прямоугольный лист бумаги размером $a \times b$ (a в два раза больше b) разрезать на четыре части и из них сложить квадрат. Как это можно сделать?

8.40. Можно ли из фигурок, изображенных на рисунке 8.23, сложить квадрат? Фигурки можно брать в неограниченном количестве.

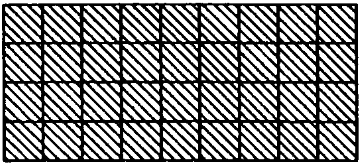


Рис. 8.21

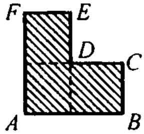


Рис. 8.22

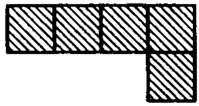


Рис. 8.23

8.41. На рисунке 8.24 изображена часть крепостной стены. Один из камней стены имеет столь причудливую форму, что если вытащить его из стены и положить иначе, то стена станет ровной. Изобразите этот камень.

8.42. Аккуратно перерисуйте на лист бумаги фигуру (рис. 8.25), имеющую очертания буквы «Е». Требуется разрезать фигуру «Е» только на 7 частей и не больше чем четырьмя прямолинейными разрезами, а затем из всех получившихся частей сложить квадрат.

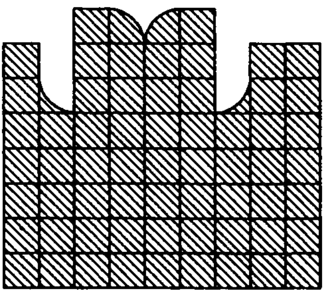


Рис. 8.24

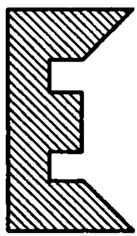


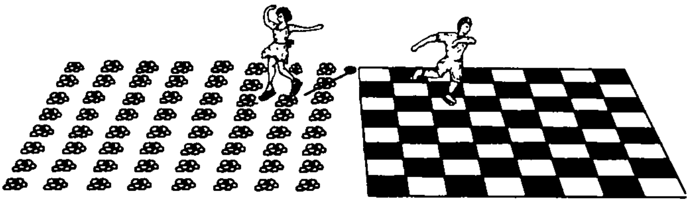
Рис. 8.25

8.43. Разрежьте квадрат на пять прямоугольников так, чтобы у любых двух соседних прямоугольников стороны не совпадали.

8.44. На московском катке искусственного льда репетируется спектакль, подготовленный силами учеников «балетной школы на льду».

Художник, оформляющий постановку спектакля, разрисовал одну половину ледяного поля под узорчатый ковер с 64 цветочками (рис. 8.26, *а*), а другую — под паркетный пол в 64 бело-черные клетки (как шахматная доска, рисунке 8.26, *б*).

Сейчас перерыв в репетиции. Во время перерыва девочка и мальчик — два неутомимых фигуриста — продолжают «вырисовывать кривые» на превосходном, зеркально-гладком ледяном поле.



а) *б)*

Рис. 8.26

Девочку заинтересовали цветочки ледяного ковра и ей захотелось одним движением, конечно, с поворотами в некоторых точках поля, проехать через все 64 цветка. Двигаться она решила только по прямым линиям, причем так, чтобы последний прямолинейный путь привел ее в то же место, с которого она начала движение (отмечено на рисунке черной точкой).

Ей это вполне удалось, причем весь ее путь состоял только из 14 прямолинейных отрезков. (Через некоторые из цветков девочка проезжала несколько раз.)

Нарисуйте на листке бумаги схему маршрута девочки.

Мальчик тренировался на втором участке ледяного поля. Узнав о «геометрических» достижениях своей подруги по фигурному катанию, он не хотел остаться в долгу и поставил перед собой еще более сложную геометрическую задачу:

Двигаясь только по белым клеткам паркета и пересекая вершины клеток не более чем по одному разу, переместиться из левого дальнего угла поля в противоположный по диагонали правый угол, побывав в каждой белой клетке. Нарисуйте схему движения фигуриста, если известно, что его путь состоит из 17 прямолинейных отрезков.

8.45. Из 8 прямоугольников размером 2×4 и 6 прямоугольников размером 2×3 Лёня сложил квадрат размером 10×10 (рис. 8.27). Внимательно посмотрев на получившуюся фигуру, мальчик обнаружил, что в двух случаях стороны прямоугольников образуют отрезки, соединяющие противоположные стороны квадрата. Это показалось Лёне некрасивым, и он попытался сложить квадрат из этих же прямоугольников по-другому, но сделать этого не сумел. Помогите Лёне!

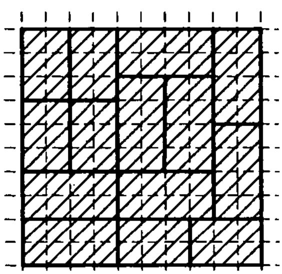


Рис. 8.27

ОТВЕТЫ. РЕШЕНИЯ. УКАЗАНИЯ

Глава 1
СВОЙСТВА НЕОПРЕДЕЛЯЕМЫХ ГЕОМЕТРИЧЕСКИХ ПОНЯТИЙ.

1.1. ПОНЯТИЕ ПЛОСКОСТИ

1.1. Грани куба — квадраты, например, $ABCD$, AA_1B_1B, B_1BCC_1 и т.д. Куб имеет 6 граней.

1.2. 8 граней.

1.4. На три части, включая саму плоскость.

1.5. Крышка стола — прямоугольный параллелепипед, а вот поверхность крышки стола является частью плоскости, которую взять в руки нельзя.

1.6. Могут.

1.8. Плоскость изображают либо параллелограммом, либо произвольной фигурой.

1.13. Лишней можно считать цилиндр на рис. 1.4, *а*, т.к. две другие фигуры — многогранник.

1.14. Лишней можно считать фигуру на рис. 1.5, *в*.

1.15. Линий можно провести бесконечно много, ни одна из них не будет плоской.

1.16. Да, есть.

Для двух точек такая плоскость найдется. Для трех точек такую плоскость построить нельзя. Для четырех точек — можно.

1.2. РАСПОЛОЖЕНИЕ ТОЧЕК

1.17. *Решение.* Рассматривая рисунок 1.6, делаем вывод, что точка A находится вне куба и не лежит на его поверхности; точки B и C лежат внутри куба; точка D лежит на поверхности куба.

1.18. *Решение.* Важно, чтобы учащиеся увидели следующие ситуации: все точки лежат внутри шара (рис. 1.39, *а*); все точки лежат вне шара (рис. 1.39, *б*); все точки лежат на границе шара, т.е. на сфере (рис. 1.39, *в*); некоторые точки лежат внутри шара, а некоторые вне его (рис. 1.39, *г*). Заметим, что изобразить это достаточно сложно.

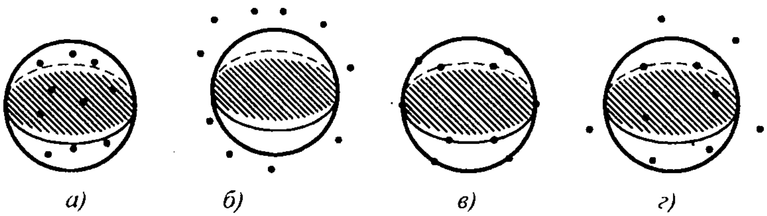


Рис. 1.39

Если мы возьмем две внутренние точки, то их можно соединить проволокой, не пересекая границы шара, если взять одну точку внутри шара, а другую снаружи и соединить их проволокой, то мы обязательно «проткнем» границу шара. Эта наглядная процедура очень полезна для дальнейшей работы.

Это простое задание является фундаментом большого количества серьезнейших геометрических проблем: область, граница, полупространство, выпуклость, вогнутость и т.д. Следует отметить одну методическую особенность нашей работы: вводить новые термины полезно, однако это не значит, что мы сразу будем давать точные определения всем этим объектам.

1.19. Решение этой задачи наглядно ясное, но вряд ли возможно надеяться, что учащиеся придумают его самостоятельно, так как в основе решения лежит чрезвычайно важная математическая идея *окрестности точки*. Под окрестностью точки понимается маленький шар, который содержит эту точку.

1) Если точка вместе со своей окрестностью лежит внутри куба, то точка является внутренней точкой куба.

2) Если точка со своей окрестностью лежит вне поверхности куба, то точка лежит вне куба.

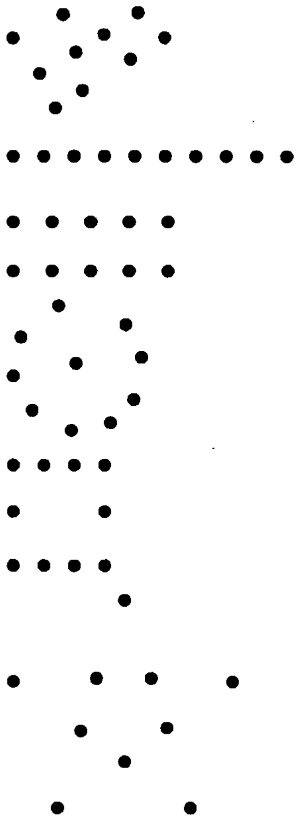
3) Если точка лежит на поверхности куба, то окрестность этой точки будет попадать и внутрь куба и вне куба.

1.20. Центр окружности ей не принадлежит. Центр круга принадлежит кругу.

1.21. Центр сферы сфере не принадлежит; центр шара принадлежит шару.

1.22. *Решение.* Очень трудно предвидеть ответы учащихся. Можно из этого задания устроить соревнование. Если десять точек мало, можно взять 50. Очень интересно посмотреть, что будут делать учащиеся.

Мы проводили во время эксперимента такую работу и на рис. 1.40 показаны различные ответы учащихся.



а) Произвольное расположение точек.

б) Точки лежат как бы на одной прямой.

в) Точки лежат как бы на двух параллельных прямых.

г) Точки лежат как бы на окружности, а одна в ее центре.

д) Точки лежат как бы на границе квадрата

е) Точки лежат как бы на границы звезды.

Рис. 1.40

Конечно, данное решение не является эталоном, но этот рисунок показывает интуицию и воображение учащихся.

1.23. *Решение.*

1. Точки могут лежать на одной прямой (рис. 1.41, *а*).

2. Две точки могут лежать на одной прямой, а третья — не лежать на этой прямой (рис. 1.41, *б*).

а) *б)*

Рис. 1.41

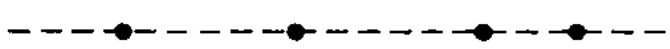
1.24. *Решение.* а) Рассмотрим случай, когда 4 точки лежат в одной плоскости.

1. Все точки могут лежать на одной прямой (рис. 1.42, *а*);

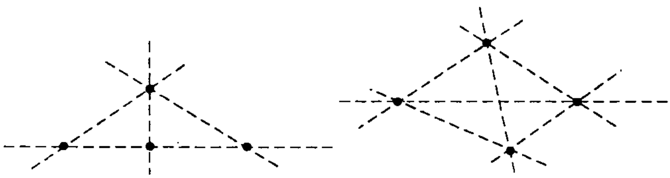
2. 3 точки лежат на одной прямой, а четвертая не лежит на ней (рис. 1.42, *б*);

3. Точки являются вершинами некоторого четырехугольника (рис. 1.42, *в*). В этом случае говорят, что никакие три точки не лежат на одной прямой.

Вы видите, что при решении участвуют прямые, но они носят вспомогательный характер, поэтому на рисунках мы проводим их пунктиром.



а)



б) *в)*

Рис. 1.42

б) 4 точки не лежат в одной плоскости.

В этом случае новым и важным является то, что учащиеся должны увидеть, что 4 точки в пространстве могут являться вершинами треугольной пирамиды (рис. 1.43).

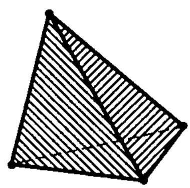


Рис. 1.43

1.25. *Решение.* а) 5 точек лежат в одной плоскости. Возможны следующие случаи расположения 5 точек:

1. Все 5 точек лежат на одной прямой (рис. 1.44, *а*);

2. 4 точки лежат на прямой, а 1 не лежит на ней (рис. 1.44, *б*);

3. 3 точки лежат на прямой, а 2 не лежат на ней (рис. 1.44, *в*);

4. 3 точки лежат на каждой из двух пересекающихся прямых, при этом одна из 5 точек является их точкой пересечения (рис. 1.44, *г*);

5. 4 точки являются вершинами четырехугольника, а 5-я точка лежит внутри него (рис. 1.44, *д*).

6. Точки являются вершинами пятиугольника (рис. 1.44, *е*).

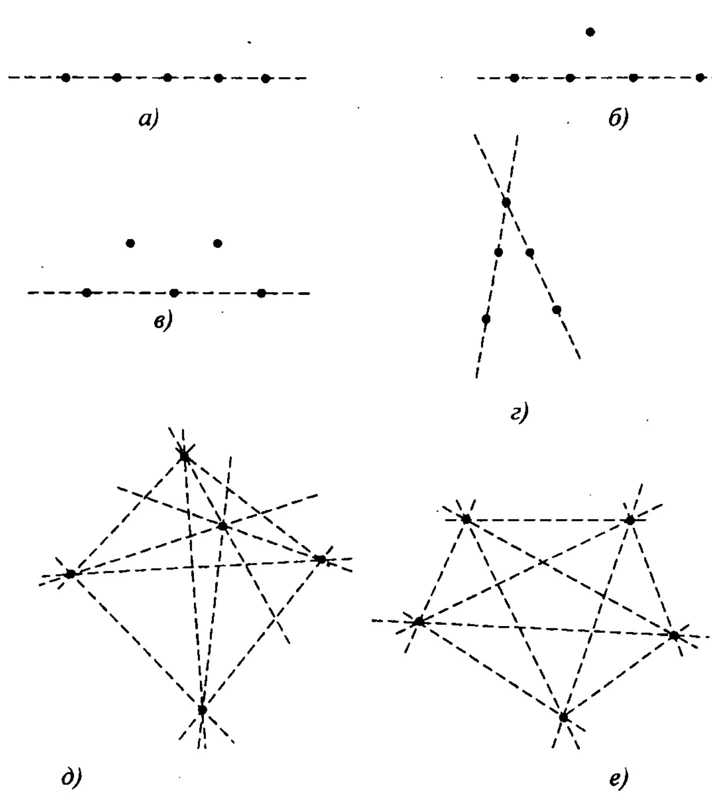


Рис. 1.44

б) 5 точек не лежат в одной плоскости. В этом случае будет хорошо, если учащиеся увидят, что у четырехугольной пирамиды вершины расположены в 5 точках (рис. 1.45).

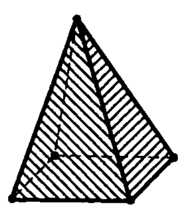


Рис. 1.45

1.26. Будем считать, что стулья — это точки. Ответ: смотри рисунки а) 1.46; б) 1.47; в) 1.48; г) 1.49, *а, б, в;* д) 1) 1.50; 2) 1.51.

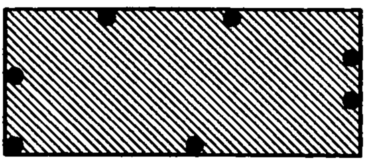


Рис. 1.46

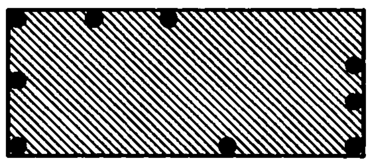


Рис. 1.47

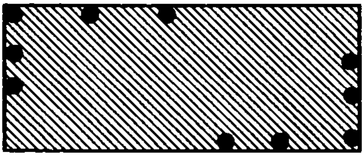
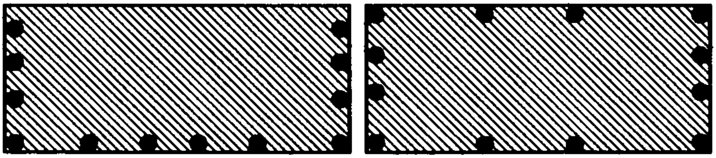
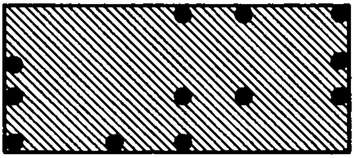


Рис. 1.48



а) *б)*



в)

Рис. 1.49

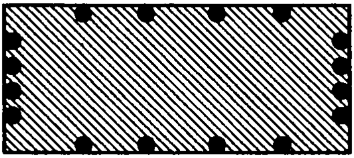


Рис. 1.50

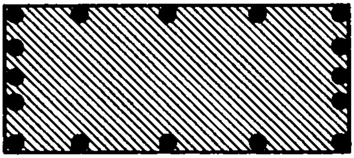


Рис. 1.51

1.27. Восемь вершин есть у куба, у многогранника, изображенного на рис. 1.52, и у семиугольной пирамиды (рис. 1.53).

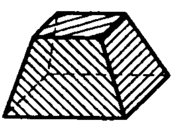


Рис. 1.52

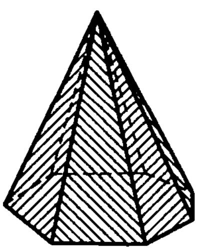


Рис. 1.53

1.3. ПОНЯТИЕ ПРЯМОЙ. АКСИОМА ПРЯМОЙ

1.28. Прямая содержит бесконечное множество точек.

1.29. 1) Прямая *a* проходит через точки *K* и *B*; прямая *b* проходит через точки *C*, *M* и *A*; прямая *c* проходит через точки *C*, *D* и *B*;

2) На прямой *b* лежат точки *C*, *M* и *A*;

3) На прямой *c* не лежат точки *M*, *K* и *A*.

1.31. Для того чтобы провести прямую, нам надо иметь две точки.

1.32. В этой задаче последний вопрос является неожиданным. На рис. 1.54, *а*, где через точку *O* проходят несколько прямых, изображение выглядит плоским, но в условии не указано, что прямые расположены в какой-то одной плоскости. Важно понимать, что прямые, пересекающиеся в одной точке, не обязательно располагаются в одной плоскости и что может получиться «еж» (рис. 1.54, *б*).

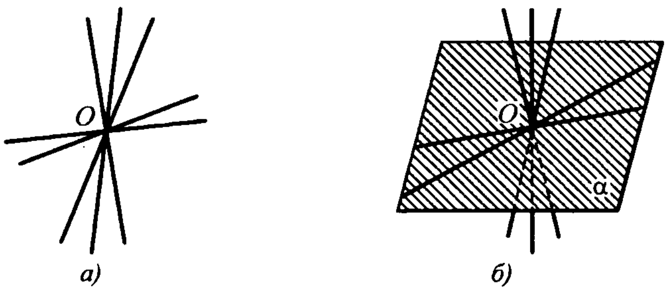


Рис. 1.54

1.33. По аксиоме прямой через две точки проходит единственная прямая.

1.34. Смотрите решение задачи 1.23.

1.35. Решение задачи сводится к рассмотрению различных случаев расположения точек и прямых.

1. Важно увидеть, что если у нас есть точка, то через нее можно провести три прямые (рис. 1.55, *а*). Эти прямые не обязательно лежат в одной плоскости.

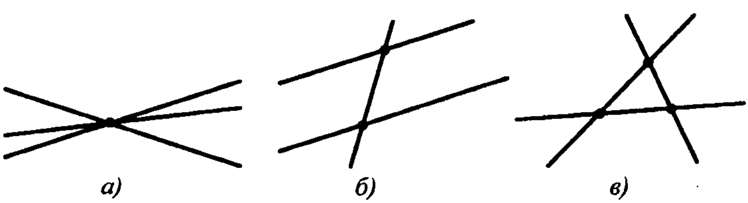


Рис. 1.55

2. Если у нас есть две точки, то можно провести три прямые (рис. 1.55, *б*). Эти прямые также необязательно лежат в одной плоскости.

3. Если у нас есть три точки — вершины треугольника (рис. 1.55, *в*), то мы построим три прямые, которые будут попарно пересекаться и лежать в одной плоскости.

1.36. Данные точки являются вершинами четырехугольника $ABCD$. Проведем прямые через каждые две точки, получим рисунок 1.56. Мы провели шесть прямых.

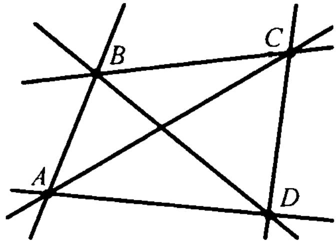


Рис. 1.56

1.37. *Решение.* В задаче 1.24 мы рассмотрели случаи расположения четырех точек на плоскости и в пространстве.

Если провести все прямые, которые при этом получаются, то мы получим следующие результаты.

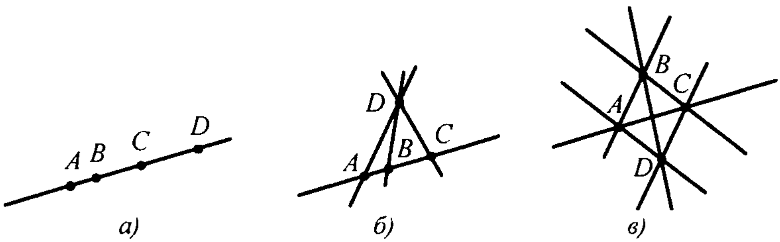


Рис. 1.57

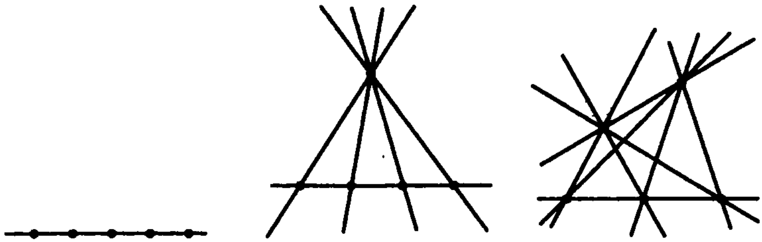
На рис. 1.57, *а* мы имеем одну прямую, на рис. 1.57, *б* — четыре прямых, на рис. 1.57, *в* — шесть прямых.

Заключительный этап решения связан с использованием приемов мыслительной деятельности сравнения и обобщения, проведя которые, приходим к выводу, что четыре точки плоскости могут определять 1, 4 или 6 прямых.

1.38. При решении задачи 1.25 мы проанализировали возможности расположения пяти точек на плоскости и в пространстве.

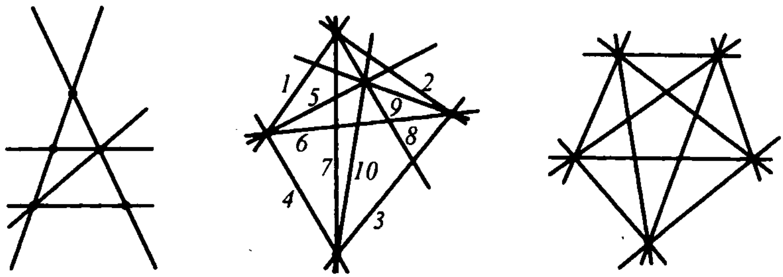
Проведя прямые, мы получим:

1. Одна прямая (рис. 1.58, *а*).
2. Пять прямых (рис. 1. 58, *б*).
3. Восемь прямых (рис. 1. 58, *в*).
4. Шесть прямых (рис. 1. 59, *а*).
5. Десять прямых (рис. 1. 59, *б, в*).



а) б) в)

Рис. 1.58



а) б) в)

Рис. 1.59

1.39. Следует начертить все прямые, содержащие ребра куба и все прямые, содержащие диагонали граней куба и диагонали самого куба.

1.41. Используя аксиому прямой, делаем вывод о том, что прямые AB, AC и BC совпадают.

1.4. ВЗАИМНОЕ РАСПОЛОЖЕНИЕ ПРЯМЫХ

1.4.1. Пересекающиеся прямые

1.45. В каждой вершине прямоугольного параллелепипеда пересекаются три прямые.

1.46. Одну общую точку.

1.47. Нет.

1.48. Не могут.

1.49. Если прямые имеют только одну общую точку, то они пересекаются, это есть определение пересекающихся прямых.

1.50. Такими парами могут быть, например, прямые AB и BC; AA_1 и A_1D_1; BC и CC_1; AB и AA_1.

1.52. Не принадлежит (рис. 1.60).

1.53. Один из вариантов решения показан на рис. 1.61.

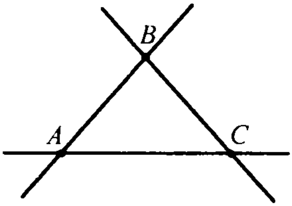


Рис. 1.60

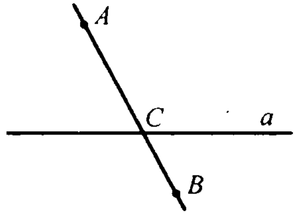


Рис. 1.61

1.54. На 7 частей.

1.55. Точки P и O лежат на одной прямой.

1.56. Смотри решение задачи 1.35.

1.57. Смотри решение задачи 1.36.

1.58. Смотри решение задачи 1.37.

1.4.2. Параллельные и скрещивающиеся прямые

1.59. Параллельные прямые лежат в одной плоскости и не имеют общих точек.

1.60. Скрещивающиеся прямые не имеют общих точек и не лежат в одной плоскости.

1.62. На рис. 1.15 представлены все виды расположения прямых: пересекающиеся, параллельные, скрещивающиеся.

1.63. Решение этой задачи есть прямое следствие определения параллельных прямых, которое сформулировано на стр. 21.

1.64. Нет.

1.65. а) Не могут; б) Могут.

1.66. Не могут.

1.67. 1. Нет. 2. Нет.

3. Да. 4. Нет.

5. Да. 6. Да.

1.68. 1. Нет. 2. Нет.

1.69. Прямые лежат в одной плоскости и не имеют общих точек.

1.71. Если посмотреть на рис. 1.15, то мы видим, что с прямой BB_1 скрещиваются прямые: AD, DC, A_1D_1, D_1C_1.

1.73. а) С ребром AB пересекаются ребра A_1A, B_1B, DA и CB. б) Параллельными ребру AB являются ребра: A_1B_1, DC и D_1C_1.

1.74. Прямыми, скрещивающимися с прямой KM_1, являются например, прямые LM, L_1M_1, K_1L_1, K_1N_1.

1.75. 12 прямых: LM, K_1N_1, MN, K_1L_1, L_1N_1, LN, LK_1, L_1M, MN_1, NK_1, NN_1, LL_1 (рис. 1.18).

1.76. *Решение.* Такими прямыми будут прямые, содержащие противолежащие стороны квадрата.

1.77. В треугольнике нет пар параллельных прямых, содержащих его стороны.

1.78. Следует воспользоваться признаком скрещивающихся прямых.

1.79. Бесконечное множество.

1.80. Не существует.

1.82. Прямые b и c скрещиваются.

1.83. Прямые b и c могут быть параллельными.

1.5. ТОЧКИ И ПРЯМЫЕ

1.5.1. Учебные задачи на взаимное расположение точек и прямых

1.85. Точка A не принадлежит прямой a. Точка B принадлежит прямой b. Точка C не принадлежит прямой m. точка K принадлежит прямой c.

1.86. 1. Прямой a принадлежат точки O и K. Прямой b принадлежат точки O и M. 2. Прямой a и b не принадлежит точка D. 3. Точка O принадлежит и прямой a, и прямой b.

1.87. Расположение прямой и точки включает два случая: точка принадлежит прямой и точка не принадлежит прямой.

1.88. Прямая и две точки могут быть расположены так: обе точки лежат на прямой; одна точка принадлежит прямой, а другая — нет; обе точки не принадлежат этой прямой.

1.89. Через две точки можно провести прямую и притом только одну. Это следует из аксиомы прямой.

1.90. $A \in a$; $B \in a$; $P \notin a$; $Q \notin a$; $R \notin a$.

1.92. 1) 8 прямых; 2) 12 прямых; 3) 18 прямых.

1.93. *Решение.* 1). а) Все три точки лежат на данной прямой (рис. 1.62, *а*).

б) Две точки лежат на прямой, а одна нет. В этом случае возможны два подслучая: эта точка может лежать либо по одну сторону от данной прямой (рис. 1.62, *б*), либо по другую (рис. 1.62, *в*).

в) Одна точка лежит на прямой, а две другие нет. В этом случае возможны три подслучая: обе точки лежат либо по одну сторону от данной прямой (рис. 1.62, *г*), либо по другую (рис. 1.62, *д*), либо по разные стороны (рис. 1.62, *е*).

г) Все три точки не лежат на прямой. В этом случае возможны следующие подслучаи: одна точка выше прямой, а две другие ниже (рис. 1.62, *ж*); две лежат выше прямой, а одна — ниже (рис. 1.62, *з*); все три точки лежат либо выше прямой (рис. 1.62, *и*), либо ниже прямой (рис. 1.62, *к*).

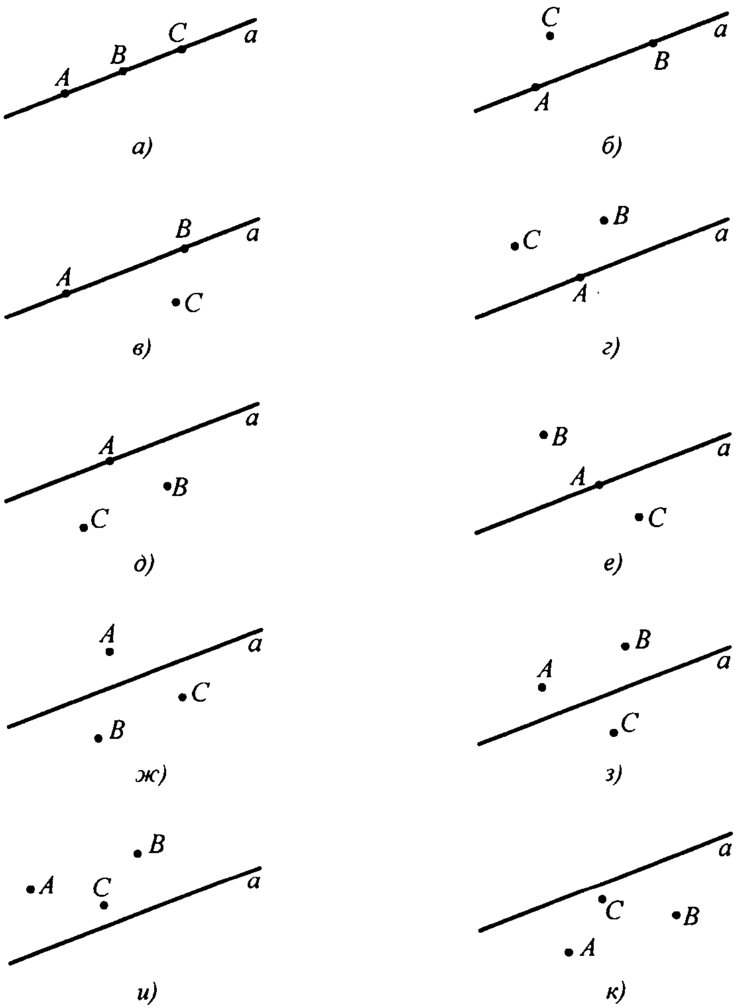


Рис. 1.62

1.94. При решении этой задачи следует рассмотреть все возможные случаи взаимного расположения прямых.

а) четыре прямые на плоскости имеют одну общую точку (рис. 1.63, *а*);

б) четыре прямые не имеют общих точек (рис. 1.63, *б*);

в) три прямые не имеют общих точек, а четвертая расположена так, что с каждой трех имеет по одной общей точке (рис. 1.63, *в*);

г) две прямые не имеют общих точек, а две другие — имеют одну общую точку (рис. 1.63, *г*);

д) две прямые не имеют общих точек, и две другие прямые также не имеют общих точек (рис. 1.63, *д*);

е) Две пересекающиеся прямые пересекают другие две пересекающиеся прямые (рис. 1.63, *е*).

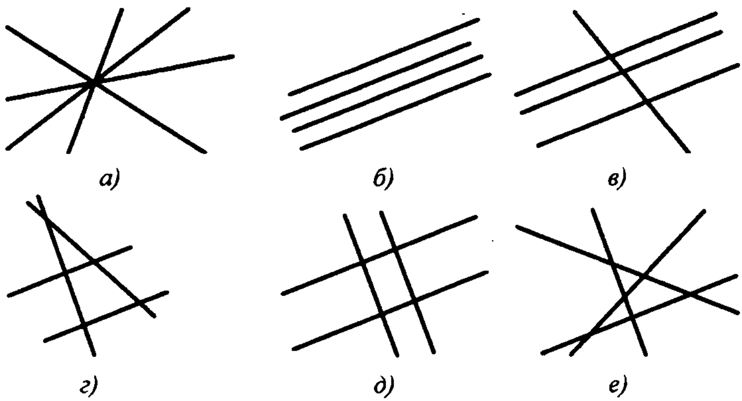


Рис. 1.63

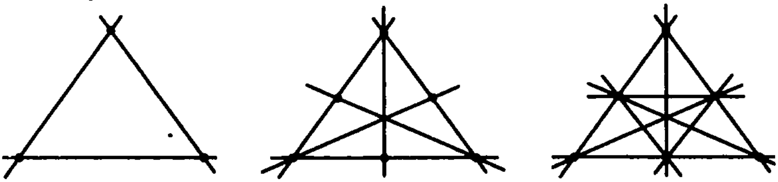
1.5.2. Более сложные задачи на взаимное расположение точек и прямых

В этом разделе мы решим несколько более сложных задач на взаимное расположение точек и прямых.

1.95. *Решение.* Переведем эту задачу на геометрический язык. Пусть монеты у нас точки, а ряды прямые. Тогда нам надо расположить 6 точек так, чтобы на 3 прямых было по 3 точки, а на 6 прямых по 2 точки.

Когда у учащихся появится опыт в изучении свойств геометрических фигур, то после прочтения текста задачи им захочется рассмотреть треугольник с тремя вариантами и на сторонах поставить по одной точке. Возможно, что такая идея придет им и в более раннем возрасте.

1. Отметим 3 точки и соединим их попарно пересекающимися прямыми (рис. 1.64, *а*). У нас получились 3 прямые на каждой из которых по 2 точки.



а) *б)* *в)*

Рис. 1.64

2. Отметим середины на каждой из сторон получившегося треугольника. Если мы теперь их соединим с каждой вершиной треугольника, то у нас появятся еще 3 прямые, на каждой из которых по 2 точки, а на прежних трех прямых будут по 3 точки (рис. 1.64, *б*).

3. Осталось провести еще 3 прямые, которые будут соединять середины сторон треугольника. Получим конфигурацию, изображенную на рис. 1.64, *в*, она является искомой.

1.96. *Решение.* 1. 8 точек можно расположить по сторонам квадрата и 1 в центре квадрата (рис. 1.65).

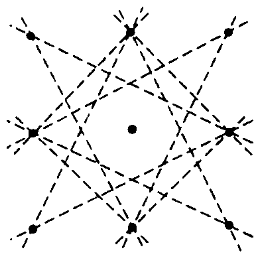


Рис. 1.65

2. Построим все прямые через данные точки так, чтобы на каждой прямой лежали только две точки. Мы не будем проводить прямые по сторонам квадрата и диагоналям квадрата, а также прямые, проходящие через центр квадрата. Поэтому у нас остается 8 точек.

3. На каждой стороне квадрата у нас по 3 точки. Поэтому если взять точки на серединах сторон квадрата мы можем провести по 4 различные прямые, на которых будет по 2 точки. А значит, общее количество таких прямых, которые проходят через середины сторон квадрата равно $4\cdot\frac{4}{2}=8$, т.к. мы каждую прямую посчитали дважды.

4. Количество прямых, проходящих через каждую вершину квадрата равно двум. Поэтому общее количество таких прямых равно $4\cdot\frac{2}{2}=4$.

5. Всего рядов, в которых находится по 2 точки $8 + 4 = 12$. Эти прямые изображены на рис. 1.65.

1.97. *Решение.* 1. Поскольку мы должны расположить 12 монет по 5 в каждом ряду, а количество монет не делится на 5, значит, хотя бы два ряда должны пересекаться.

2. Пусть в точке пересечения этих рядов расположена одна из 2-х монет. На каждом из этих двух пересекающихся рядов будет еще по 4 монеты. Итого в двух рядах мы разместили 9 монет.

3. У нас осталось еще 3 монеты. Поскольку в каждом ряду должно быть по 5 монет, значит, две монеты мы должны взять из двух других рядов.

4. Таким образом, получаем, что монеты должны располагаться как показано на рис. 1.66.

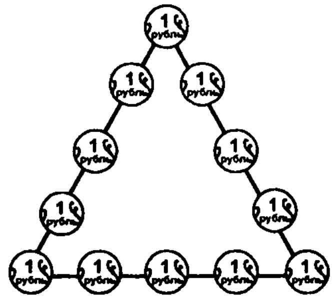


Рис. 1.66

1.98. *Решение.* Интуиция подсказывает, что надо попробовать нарисовать симметричную фигуру.

1. Так как количество точек у нас 25, а количество прямых 12 надо попробовать сначала расположить 4 точки в вершинах квадрата, а одну из них в центре (точки 1, 2, 3, 4, 5) и соединить эти 4 точки, чтобы образовать квадрат (рис. 1.67, *а*).

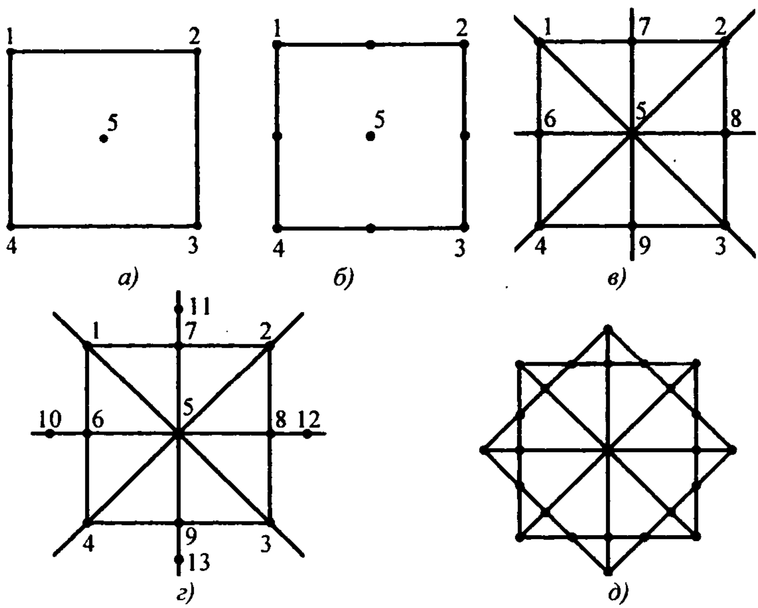


Рис. 1.67

2. Следует образовать новый квадрат. Его можно построить по-разному. Первый способ заключается в том, что мы проводим стороны нового квадрата через вершины исходного квадрата.

3. В этом случае у нас на каждой прямой уже по 3 точки, кроме сторон исходного квадрата. Итого у нас 12 прямых и 9 точек. Поэтому предложенный способ не подходит.

4. Можно заметить, что после того как одну из этих точек мы поместили в центр, у нас осталось 24 точки.

5. Поскольку мы уже из этих 24 точек 4 разместили по вершинам квадрата, попробуем еще 4 разместить в серединах сторон этого квадрата (рис. 1.67, *б*). Проведем все прямые через данные точки так, чтобы на каждой прямой было по 3 точки (рис. 1.67, *в*). Получили 8 прямых и 9 точек.

6. У нас осталось еще 16 точек. Их надо распределить по этим восьми прямым по 2 точки. Интуиция подсказывает, что стоит попробовать сначала еще 4 точки 10, 11, 12, 13 разместить на прямых (6–8) и (7–9) так, чтобы они были вершинами квадрата (рис. 1.66, *г*). При этом если соединим точки 10 и 11, 11 и 12, 12 и 13, 10 и 13, каждая из полученных четырех прямых будет пересекать соседние стороны квадрата (1, 2, 3, 4) и также его диагонали.

7. Итак, получили нужную конфигурацию (рис. 1.67, *д*).

1.5.3. Трехточечники

1.99. Выше мы отметили, что для двух прямых на плоскости возможны следующие случаи их взаимного расположения: а) прямые параллельны; б) прямые пересекаются. Для случая а) решение данной задачи невозможно, т.к. нам в соответствии с условием задачи даны 5 точек. В случае б) обе прямые имеют одну общую точку. Таким образом, у нас остаются еще 4 точки, которые можно расположить по 2 на каждой прямой (рис. 1.68).

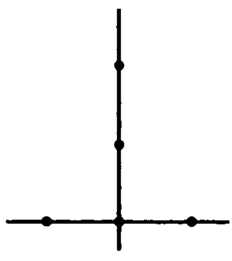


Рис. 1.68

1.100. *Решение.* Каждый ряд деревьев можно принять за прямую, а деревья за точки. В задаче 1.94 мы изучили случаи всевозможного расположения 4-х прямых (рис. 1.63).

1. Прямые параллельны между собой (рис. 1.69, *а*). Тогда чтобы на каждой прямой было по 3 точки необходимо, чтобы общее количество точек было 12, а у нас их всего 6. Значит, этот случай отпадает.

2. 3 прямые параллельны между собой, а четвертая пересекает их (рис. 1.69, *б*). Тогда на одной из прямых мы уже имеем 3 точки. Для того чтобы на каждой прямой было по 3 точки, нам необходимо еще 6 точек. Таким образом в этом случае задача не может иметь решения.

3. Прямые попарно параллельны (рис. 1.69, *в*). Тогда на каждой прямой у нас уже по 2 точки. Нам нужно еще 4 точки. Итого нужно 8 точек, а по условию задачи их 6.

4. 3 прямые пересекаются в одной точке, а четвертая параллельна одной из них (рис. 1.69, *г*). В этом случае нам необходимо 8 точек, чтобы на каждой прямой было по 3 точки, а дано только 6 точек.

5. Две прямые параллельны между собой, а две другие пересекаются между собой и пересекают параллельные прямые (рис. 1.69, *д*). В этом случае на пересекающихся прямых уже по 3 точки есть. Остается добавить по точке на параллельные прямые. Итого требуется 7 точек вместо имеющихся шести.

6. Можно уменьшить количество точек на единицу, но для этого надо вместо 2-х параллельных прямых взять 2 пересекающиеся прямые, как показано на (рис. 1.69, *е*).

На рис. 1.69, *е* имеется 6 точек и 4 прямые и на каждой прямой по 3 точки. Это и есть решение задачи.

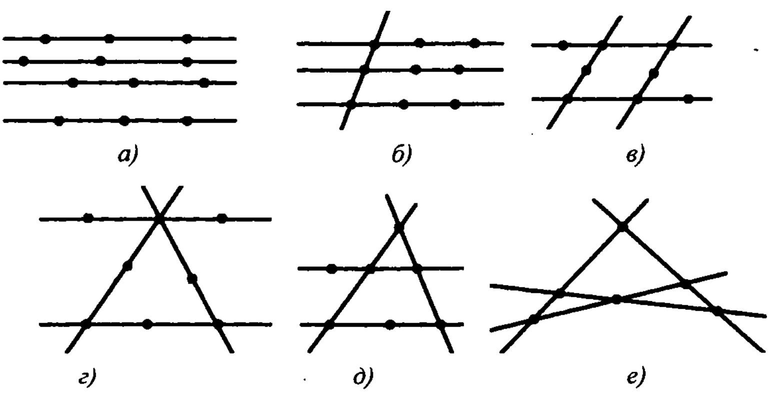


Рис. 1.69

1.101. *Решение.* Выполним следующие построения:

1. Начертим прямую l_1 и отметим на ней 3 точки: A_1, A_2, A_3. Возьмем точку A_4, не лежащую на прямой l_1 (рис. 1.70, *а*).

2. Проведем 3 различные прямые l_2, l_3 и l_4 через точку A_4, и точки A_1, A_2, A_3 (рис. 1.70, *б*). Мы получим 4 точки и 4 прямые.

Можно продолжать строить точки и прямые и стремиться к нужному результату. Но возникает нестандартная идея.

3. Проведем прямую l_5, параллельную прямой l_1, она пересечет три другие прямые в точках A_5, A_6, A_7 и в итоге получим, что на каждой из пяти прямых имеем по 3 точки, а всего 7 точек (рис. 1.70, *в*).

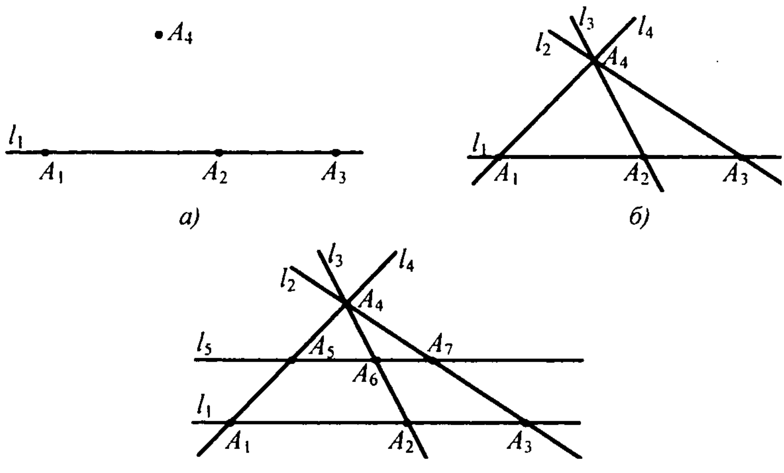


Рис. 1.70

При решении этой задачи рождается «нестандартная идея» — проведение параллельной прямой. Это построение будет дальше часто использоваться.

1.102. *Решение.* Каждый ряд посаженных тюльпанов представляет из себя прямую, а каждый тюльпан точку. Рассмотрим всевозможные случаи взаимного расположения 6 прямых.

1. Все прямые пересекаются в одной точке (рис. 1.71, *а*). В этом случае решение невозможно.

2. Все 6 прямых параллельны между собой. Если на каждой прямой взять по точке, а на одной из них 2 точки (рис. 1.71, *б*), то мы имеем 7 точек, но остальные условия не выполняются.

3. 5 прямых параллельны между собой, а шестая пересекает их. Тогда на каждой из пяти прямых будет по точке, а на двух из них по 2 точке (рис. 1.71, *в*). Данный случай не дает решения.

4. 4 прямые параллельны между собой и 2 прямые пересекающие их также параллельные между собой. В этом случае имеем 8 точек пересечений (рис. 1.71, *г*), а в условии требуется использовать только 7 точек.

5. 4 параллельные между собой прямые и 2 пересекающиеся между собой прямые, которые пересекают эти 4 прямые, их точка пересечения не принадлежит ни одной из 4-х параллельных прямых (рис. 1.71, *д*). В этом случае получаем 9 точек пересечения. Этот случай не удовлетворяет условию задачи.

6. 4 параллельные между собой прямые и 2 пересекающиеся между собой прямые, которые пересекают эти 4 прямые и их точка пересечения принадлежит одной из 4-х параллельных прямых (рис. 1.71, *е*). Здесь мы расположили 7 точек, но у нас на каждой из прямых не по 3 точки.

7. 3 параллельные между собой прямые и еще три параллельные между собой прямые, пересекающие первые 3 прямые (рис. 1.71, *ж*). В этом случае имеем 9 точек пересечений, что больше чем задано в условии задачи.

8. 3 прямые параллельны между собой, еще 2 оставшиеся параллельные между собой прямые их пересекают, седьмая прямая проходит через точки пересечения этих двух параллельных прямых с тремя другими (рис. 1.71, *з*). В этом случае на двух прямых у нас по 2 точки. Поэтому этот случай не удовлетворяет условию задачи.

9. 3 прямые параллельны между собой, а 3 другие пересекаются в точке, лежащей на любой из параллельных прямых. Получаем 7 точек пересечения, но на одной из прямых только 1 точка (рис. 1.71, *и*). Поэтому этот случай нас не устраивает.

10. 3 прямые параллельны между собой, а 3 другие пересекаются в точке, не лежащей ни на одной из параллельных прямых. В этом случае имеем 10 точек пересечения (рис. 1.70, *к*), что не удовлетворяет условию задачи.

11. 3 прямые параллельны между собой (l_1, l_2 и l_3), а прямые l_4 и l_5 параллельны между собой и пересекаются с прямыми l_1, l_2 и l_3. Прямая l_6 пересекает l_1 и l_5 в одной и той же точке. В этом случае у нас получается 9 точек пересечения (рис. 1.71, *л*), что не удовлетворяет условию задачи.

12. 3 прямые параллельны между собой (l_1, l_2 и l_3), а прямые l_4 и l_5 параллельные между собой и пересекаются с прямыми l_1, l_2 и l_3. Прямая l_6 пересекает прямые (l_1, l_2, l_3, l_4 и l_5 в разных точках. В этом случае имеем 11 точек пересечения (рис. 1.71, *м*), что не удовлетворяет условию задачи.

13. Нарисуем 3 пересекающиеся между собой в различных точках прямые. Из вершин полученного треугольника проведем еще 3 прямые, которые будут пересекаться в одной точке (рис. 1.71, *н*). В этом случае условие задачи выполняется.

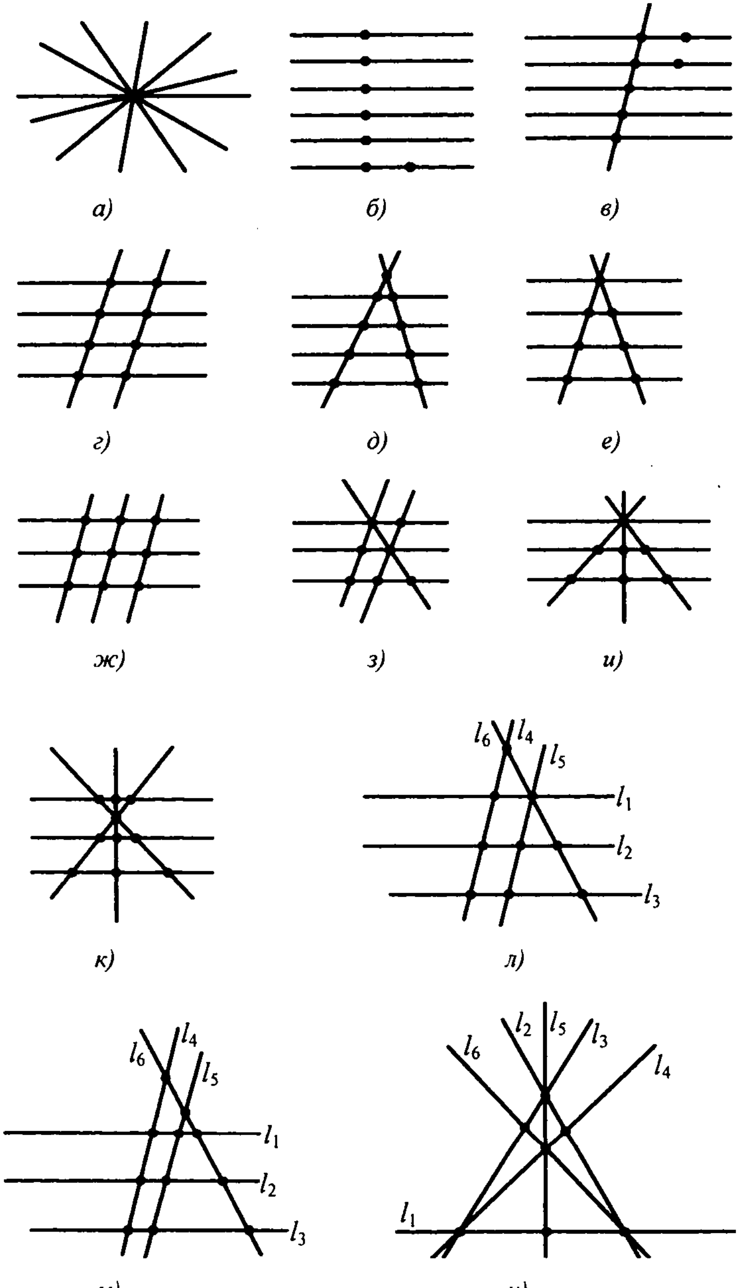


Рис. 1.71

1.103. Доказательство. 1. Предположим, что такое расположение семи точек и семи прямых существует. Будем называть эти прямые и точки *данными*.

Замечание. Пункт 1 означает, что: а) через каждую данную точку проходят ровно три *данных* прямых; б) на каждой *данной* прямой лежат три *данные* точки.

2. Докажем, что прямая, проходящая через любые две *данные* точки M и P, является *данной* (требуется доказать).

3. Так как точка M *данная*, то через нее проходят три *данные* прямые, и на каждой из прямых есть еще по две *данные* точки это следует из п. 1.

4. Одной из шести точек должна быть точка P, так как *данных* точек всего семь. Это следует из п. 1, 3.

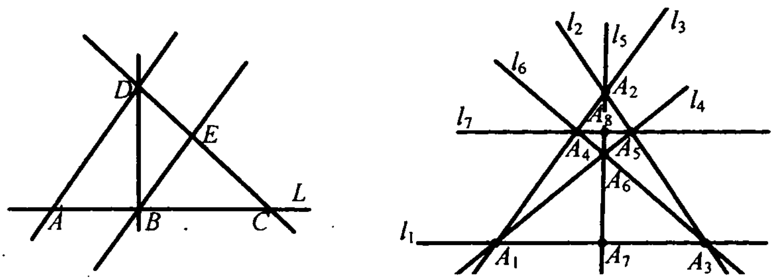
5. Прямая MP является *данной*. Это следует из п. 3, 4.

Аналогично доказывается, что любые две *данные* прямые пересекаются в *данной* точке.

6. Пусть A, B, C — данные точки, лежащие на *данной* прямой L так, что B лежит между A и C, D — та из остальных данных точек, которая ближе к L (рис. 1.72, *а*).

7. По доказанному прямые AD, BD, CD данные.

8. По условию через точку B проходит еще одна прямая, отличная от BD. Это следует из п. 1.



а) *б)*

Рис. 1.72

9. Эта прямая пересекает отрезок AD или отрезок CD в некоторой *данной* точке E, которая ближе к прямой L, чем точка D. Это следует из п.8.

10. Пункт 9 противоречит п. 7, а значит, наше исходное предположение неверно и такого расположения семи точек и семи прямых не существует.

Это пример сложной задачи и сложного доказательства, однако оно не требует никаких новых знаний.

1.104. *Решение.* Ранее мы решили задачу для случая 7 точек и 6 прямых. Рассмотрим, как нам надо изменить конфигурацию, изображенную на рис. 1.70, *н*, чтобы получить искомый результат.

Нам достаточно здесь провести прямую l_7 через точки A_4 и A_5. Эта прямая пересечет прямую l_5 в точке A_8 (рис. 1.72, *б*).

1.105. *Решение.* 1. Из условия задачи видим, что если все прямые были бы параллельны между собой, то у нас не хватило бы количества точек, чтобы на каждой прямой было по 3 точки. Поэтому хотя бы 2 из них должны пересекаться между собой, например, прямые l_1 и l_2 пересекаются в точке A_1 (рис. 1.73, *а*).

2. Возьмем точку A_2 на прямой l_1. Из этой точки можно провести как прямую, которая будет пересекать прямую l_2, так и параллельную l_2.

Предположим, что прямая l_3 параллельна прямой l_2 (рис. 1.73, б).

На прямой l_1 две точки, а на прямых l_2 и l_3 по одной. Если мы не будем использовать для проведения новых прямых уже существующие точки, то количество прямых будет меньше количества точек.

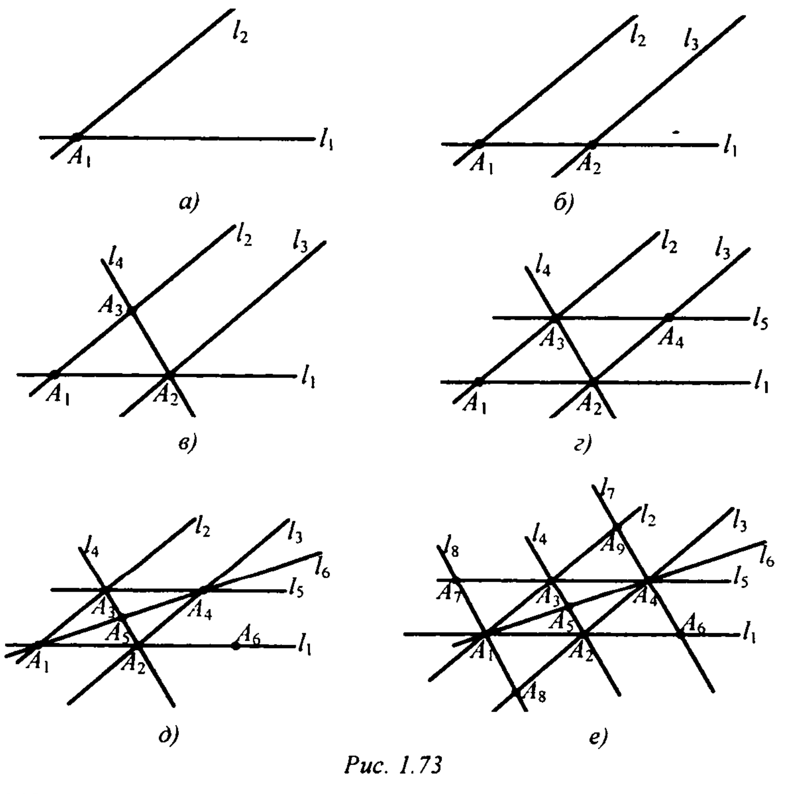


Рис. 1.73

3. Проведем прямую l_4, например, через точку A_2 (рис. 1.73, *в*).

Мы получили, что через точки A_1 и A_3 проходят по 2 прямые, а через точку A_2 — 3 прямые. Итого мы провели 4 прямые и разместили 3 точки.

4. Чтобы при проведении прямой l_5 количество точек увеличилось на 1, проведем ее через точку A_3, параллельно прямой l_1 (рис. 1.73, *г*).

5. Если теперь прямую l_6 мы проведем через точки A_1 и A_4, то количество точек увеличится на 1 (рис. 1.73, *д*). Теперь на прямых l_4 и l_6 у нас по 3 точки.

6. Прямую l_7 мы можем провести через точку A_4, параллельно прямой l_4 (рис. 1.73, *е*). Получили 7 точек и 7 прямых, на каждой из которых по 3 точки за исключением прямых l_3 и l_5.

7. Проведем прямую l_8 через точку A_1 так, чтобы она была параллельны прямой l_4 (рис. 173, *е*). Получили 9 точек и 8 прямых таких, что на каждой из них по 3 точки.

Мы показали один из вариантов поисковой деятельности, которую мы наблюдали во время эксперимента. Конечно же могут быть другие варианты поиска.

1.106. *Решение*. Приведем один из вариантов построения требуемой конструкции.

1. Построим прямую l_1 и отметим на ней 3 точки: A_1, A_2, A_3 (рис. 1.74, *а*).

2. Проведем через точку A_1 прямую l_2 (рис. 1.74, *б*).

3. Через точку A_2 проведем прямую l_3, которая будет пересекать прямые l_1 и l_2 в точках A_2 и A_4 соответственно (рис. 1.74, *в*).

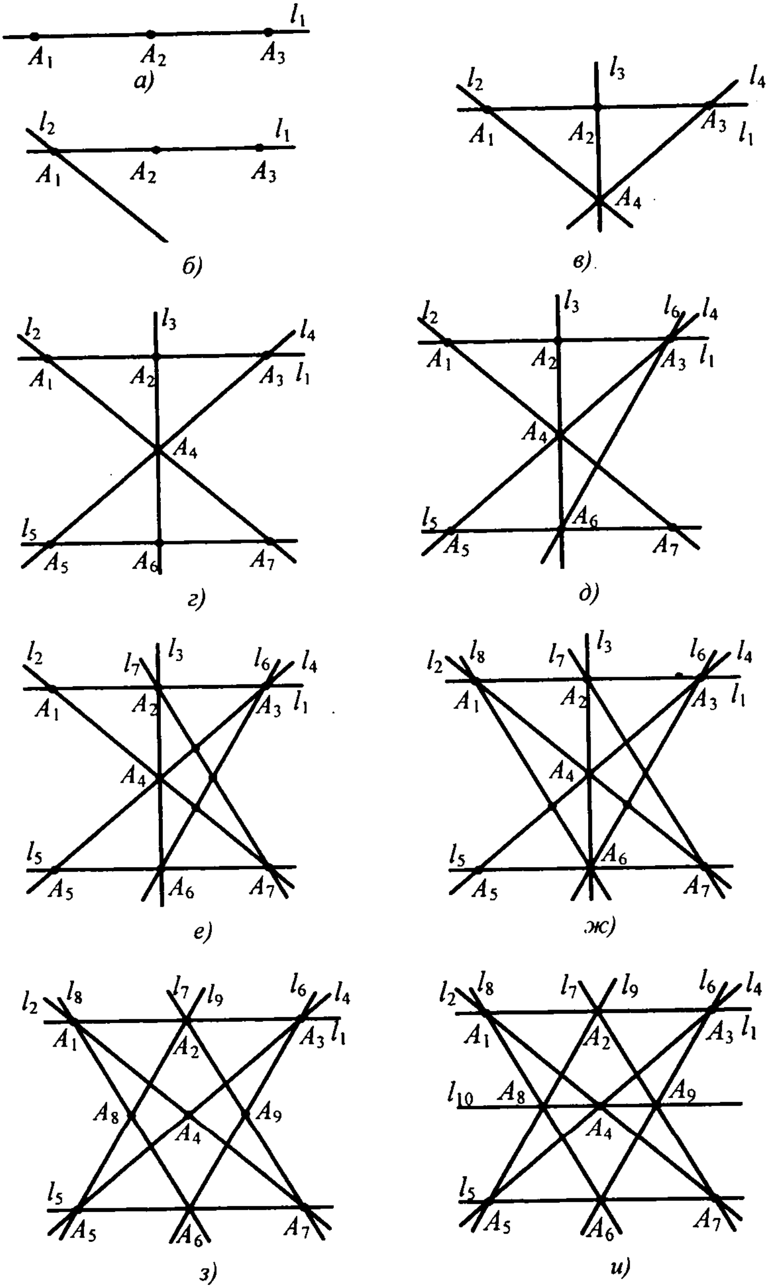
Мы видим, что на прямых l_2 и l_3 у нас по 2 точки пересечения, а на прямой l_1 отмечена точка A_3, через которую не проходит ни одной пересекающей l_1 прямой. (Через точку A_1 у нас проходят 2 прямые).

4. Проведем прямую l_4 через точки A_3 и A_4 (рис. 1.74, *в*). Имеем 3 прямые l_2, l_3 и l_4, на каждой из которых по 2 точки, и одну прямую l_1 , на которой 3 точки. Через точку A_4 проходят 3 прямые.

5. Проведем прямую l_5, параллельную прямой l_1, чтобы на каждой из прямых l_2, l_3 и l_4 получить еще по одной точке, тогда на каждой из этих прямых будет по 3 точки (рис. 1.74, *г*).

Итак, через точку A_4 проходят 3 прямые: l_2, l_3, l_4. А через точки A_1, A_2, A_3, A_5, A_6, A_7 проходят по 2 прямые.

6. Проведем через точки A_3 и A_6 прямую l_6. Теперь через точки A_3, A_4, A_6 у нас проходят по 3 прямые, а через точки A_1, A_2, A_5, и A_7 — по 2 прямые (рис. 1.74, *д*).



l_1 A_1 A_2 A_3
а)
l_2 l_1 A_1 A_2 A_3
б)
l_2 l_3 l_4 A_1 A_2 A_3 l_1 A_4
в)
l_2 l_3 l_4 A_1 A_2 A_3 l_1 A_4 l_5 A_5 A_6 A_7
г)
l_2 l_3 l_6 l_4 A_1 A_2 A_3 l_1 A_4 l_5 A_5 A_6 A_7
д)
l_2 l_7 l_3 l_6 l_4 A_1 A_2 A_3 l_1 A_4 l_5 A_5 A_6 A_7
е)
l_2 l_8 l_7 l_3 l_6 l_4 A_1 A_2 A_3 l_1 A_4 l_5 A_5 A_6 A_7
ж)
l_2 l_8 l_7 l_9 l_6 l_4 A_1 A_2 A_3 l_1 A_8 A_4 A_9 l_5 A_5 A_6 A_7
з)
l_2 l_8 l_7 l_9 l_6 l_4 A_1 A_2 A_3 l_1 l_{10} A_8 A_9 A_4 l_5 A_5 A_6 A_7
и)

Рис. 1.74

7. Проведём через точки A_2 и A_7 прямую l_7. (рис. 1.74, *е*). Теперь через точки A_2, A_3, A_4, A_6 и A_7 проходят по 3 прямые, через точки A_1, A_5 — 2 прямые.

8. Если сейчас провести прямую, проходящую через точки A_1 и A_6, то получим фигуру, изображенную на рис. 1.74, *ж*. Мы имеем 5 точек, через которые проходят по 3 прямые: A_1, A_2, A_3, A_4 и A_7 и 3 прямые (l_1, l_3, l_5), которые пересекаются в 3-х точках с другими прямыми.

9. Проведем через точки A_1 и A_6 прямую l_8. Но тогда через точку A_6 проходят 4 прямые (рис. 1.74, *ж*), а через точку A_5 проходят только 2 прямые.

10. Уберем прямую l_3 и проведем через точки A_2 и A_5 прямую l_9 (рис. 1.74, *з*).

11. Имеем: через точки A_1, A_2, A_3, A_5, A_6 и A_7 проходят по 3 прямые, а через точки A_8, A_4, и A_9 по 2 прямые.

12. Расположим точки A_5, A_6, A_7 на прямой l_5 так, чтобы после проведения прямых l_2, l_4 и l_6 точки A_4, A_8 и A_9 легли на одну прямую.

13. Проведем прямую l_{10} через эти 3 точки (рис. 1.74, *и*).

14. Итого получили 9 прямых и 9 точек, удовлетворяющих условию задачи.

1.107. *Решение.* Возьмем конфигурацию Паскаля. Там было более жесткое условие на количество прямых, проходящих через каждую точку. В этой задаче у нас количество прямых больше на 1, по сравнению с конфигурацией Паскаля. Поэтому проведем еще одну прямую через точки A_2, A_4 и A_6 (рис. 1.75).

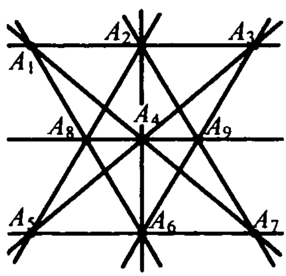


Рис. 1.75

Эта задача и ее решение имеет очень важные и серьезные продолжения.

Если знать проективную геометрию, то можно понять, что решение этой задачи можно использовать в качестве чертежа (рис. 1.76) при доказательстве знаменитой теоремы Паппа: «Если три точки A, B, C лежат на одной прямой, а три точки D, E, F — на другой прямой (прямые не обязательно должны быть параллельны, как на рис. 1.76), то точки пересечения G, H, I противоположных сторон шестиугольника $AFBDCE$, вершины которого попеременно лежат то на прямой ABC, то на прямой DEF, также лежат на одной прямой». Задача о посадке деревьев самым тесным образом связана с разделом проективной геометрии, который изучает отношение инцидентности (точка инцидентна любой проходящей через нее прямой, прямая инцидентна любой лежащей на ней точке). Чертеж, с помощью которого в курсах проективной геометрии обычно доказывают знаменитую теорему Дезарга, позволяет решить две задачи о посадке деревьев: как посадить 25 деревьев в 10 рядов по 6 деревьев в каждом ряду и как посадить 19 деревьев в 9 рядов по 5 деревьев в каждом ряду. Задача о деревьях уводит нас в «глубокие воды» комбинаторики. Общего метода, позволяющего решить любые задачи подобного типа, пока не существует, и эта область занимательной математики изобилует нерешенными вопросами.

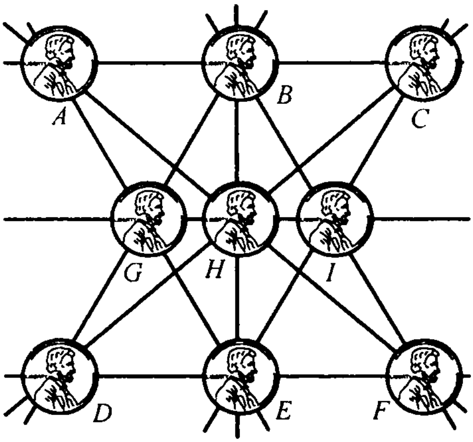


Рис. 1.76

1.108. Конфигурация Дезарга изображена на рис. 1.77.

Конфигурацию Дезарга можем представить следующим образом. Возьмем треугольную пирамиду и отметим середины ее ребер (рис. 1.78). Точками назовем вершины пирамиды и середины ребер, а прямыми — ребра и середины ребер, лежащих в одной грани. Прямой-ребру принадлежат лежащие на нем вершины и его середина.

Убедитесь, что получилась модель конфигурации Дезарга.

Какие тройки точек нашей модели являются треугольниками? Это вершины, лежащие в одной грани, или вершина и середины прилегающих к ней ребер, или середины ребер, прилегающих к одной вершине. Хотя с точки зрения обычных преобразований пирамиды — поворотов и симметрии (рис. 1.79) — эти треугольники не равноправны, достаточно добавить еще одно преобразование Т (оно показано на рис. 1.80, чтобы убедиться в равноправности всех треугольников и тем самым в правильности ответа.

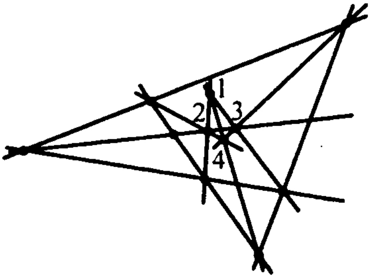


Рис. 1.77

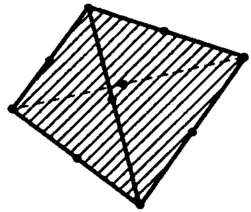
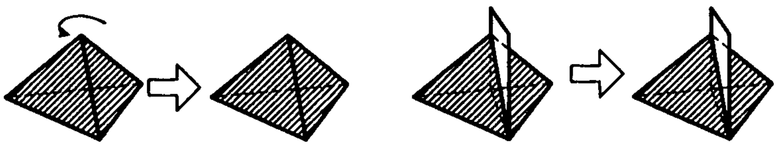
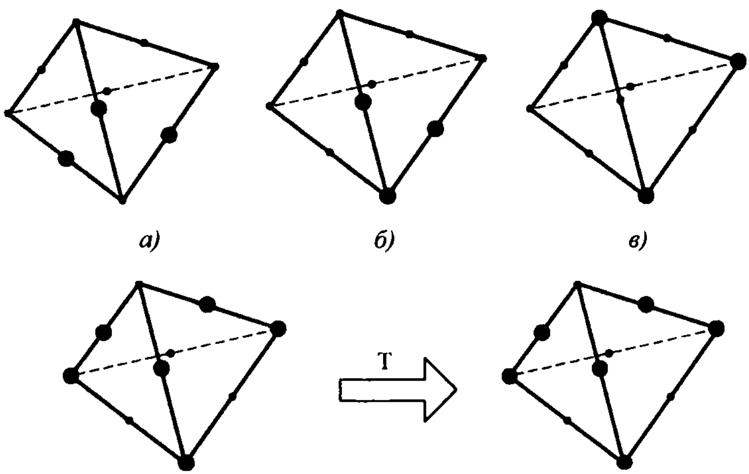


Рис. 1.78



а) *б)*

Рис. 1.79



а) *б)* *в)*

г)

Рис. 1.80

1.109. *Решение*. У нас четное количество точек и прямых. Поэтому возможно фигура должна получиться симметричной.

1. Один из способов получить такую фигуру — расположить 4 точки в вершинах квадрата, а пятую в центре квадрата

(рис. 1.81, *а*). В результате мы получили прямые A_1A_3 и A_2A_4, на которых лежат по 3 точки. И через точки A_1, A_2, A_3 и A_4 проходит по 3 прямые.

2. Попробуем взять по точке на каждой из прямых A_1A_4 и A_2A_3, которые будут симметричны относительно прямой, проходящей через точку A_5 параллельно сторонам A_1A_4 и A_2A_3. Обозначим их через A_6 и A_7 и проведем 2 прямые, проходящие через A_5 и A_6, A_5 и A_7 (рис. 1.81, *б*).

3. Мы уже использовали 8 прямых и 7 точек. Если мы уберем 2 прямые A_1A_2 и A_3A_4, то мы используем половину прямых из того числа, которое нам дано (рис. 1.81, *в*). Нам надо расположить еще 3 точки так, чтобы они были симметричны относительно прямой, проходящей через точку A_5.

Итак, все 7 точек у нас расположены симметрично и поэтому можем считать, что они зафиксированы.

4. Попробуем провести прямые через A_3 и A_6, A_4 и A_7 (рис. 1.81, *г*). У нас остались еще 3 точки. Одну из этих точек расположим на оси симметрии квадрата, проходящей через точку A_5. Эта точка будет точкой пересечения прямых A_1A_7 и A_2A_6 (рис. 1.81, *д*). Обозначим ее через A_8.

Мы имеем 8 прямых, на каждой из которых, кроме прямых A_5A_7, A_3A_6, A_4A_7, A_5A_6, по 3 точки.

5. Возьмем в качестве двух оставшихся точек точки пересечения A_5A_7 и A_3A_6, A_5A_6 и A_4A_7 (рис. 1.81, *е*).

6. Мы провели 10 прямых. 2 оставшиеся прямые проведем через A_4 и A_8, A_3 и A_8. При этом вначале может оказаться так, что точка A_9 не попадет на прямую A_4A_8, а точка A_{10} не попадет на прямую A_3A_8. Поэтому точки A_6 и A_7 будем смещать одновременно вдоль прямых A_1A_4 и A_2A_3 так, чтобы они оказались на прямых A_4A_8 и A_3A_8. В результате получим конфигурацию, изображенную на (рис. 1.81, *ж*).

1.110. *Решение.* 1. Возьмем конфигурацию из задачи 1.109 (10 точек *и* 12 прямых). У нас дополнительно появилась еще одна точка.

2. Надо эту точку расположить на оси симметрии A_5A_8. Обозначим ее через A_{11}. Нам надо теперь провести 4 прямые через эту точку. Одну из них проведем через A_3A_4. Вторую через A_1A_{11}, третью через A_2A_{11}. А на четвертой прямой эта точка уже лежит, так как мы ее выбрали на оси симметрии A_5A_8.

4. Если точки A_9 и A_{10} не лягут на прямые A_1A_{11} и A_2A_{11} соответственно, нам надо будет так сдвинуть точки A_6 и A_7 так, чтобы точки A_9 и A_{10} легли на прямые A_1A_{11} и A_2A_{11}.

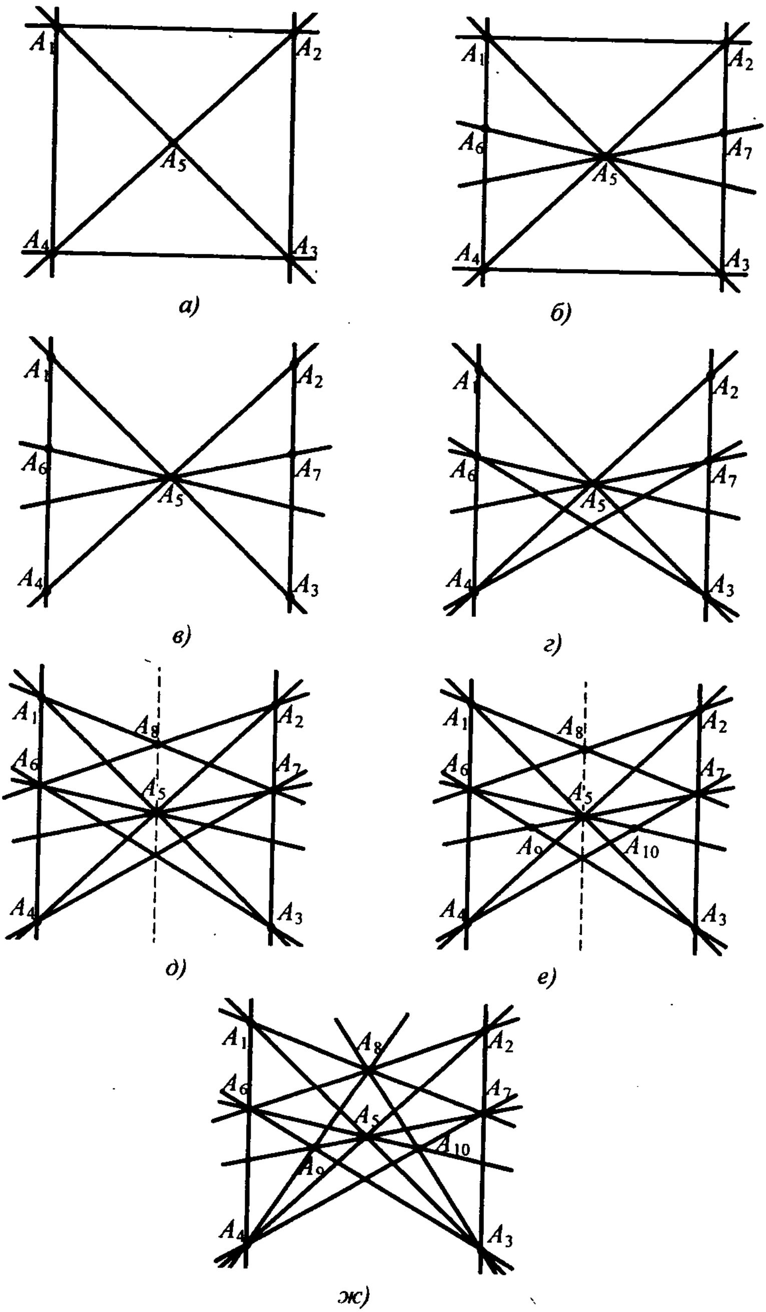

A1 A2 A3 A4 A5
а)
A1 A2 A3 A4 A5 A6 A7
б)
A1 A2 A3 A4 A5 A6 A7
в)
A1 A2 A3 A4 A5 A6 A7
г)
A1 A2 A3 A4 A5 A6 A7 A8
д)
A1 A2 A3 A4 A5 A6 A7 A8 A9 A10
е)
A1 A2 A3 A4 A5 A6 A7 A8 A9 A10
ж)

Рис. 1.81

5. В результате получаем конфигурацию, изображенную на рис. 1.82.

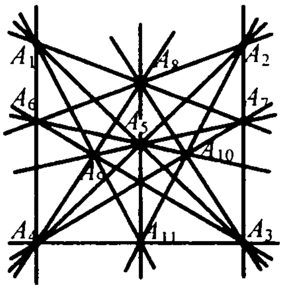


Рис. 1.82

На этапе осознания сути основной проблемы задания учитель может предложить учащимся следующие вопросы-подсказки: «Могут ли три точки располагаться так, чтобы через них проходила единственная прямая? Могут ли четыре точки располагаться так, чтобы через них проходили две прямые так, чтобы на каждой прямой было по три точки? Могут ли пять точек располагаться так, чтобы через них проходили две прямые, содержащие каждая по три точки? Могут ли шесть точек располагаться так, чтобы через них проходили три прямые, содержащие по три точки?»

Эти задачи относятся к области математики, называемой комбинаторной геометрией. Поэтому решения задач из данного исследовательского задания направлены, в основном, на формирование такого элемента исследовательской деятельности, как организация полного или сокращенного перебора (различных гипотез решения и возможных вариантов решения), а также — обобщение полученного результата.

Также очень важно развить понимание того, что надо использовать какие-то симметрии. Полезно, чтобы учащиеся попробовали разнообразные способы симметричных расположений точек. Симметрии могут быть относительно прямой или относительно точки.

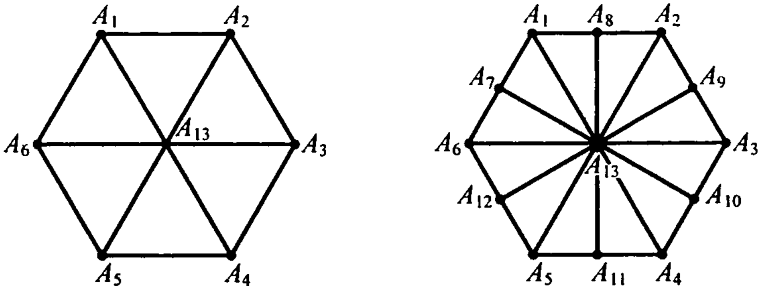
Выполнив чертежи к каждому из этих несложных вопросов, учащиеся подходят ко второму этапу исследования — самостоятельному поиску принципиального решения проблемы.

1.111. *Решение*. Примем кусты за точки, а ряды за прямые. Тогда нам надо расположить 13 точек и 12 прямых по 3 точки на каждой прямой.

1. Попробуем вновь воспользоваться симметрией. Число 13 наводит на мысль, что нам надо попробовать разместить 6 точек в вершинах правильного шестиугольника и соединить попарно противоположные вершины, а одну точку разместить в центре (рис. 1.83, *а*).

2. Нам осталось разместить еще 6 точек и провести 3 прямые. Если мы возьмем эти точки на серединах сторон шестиугольника,

а потом соединим противолежащие точки, получим конфигурацию, изображенную на рис. 1.83, *б*.



а) *б)*

Рис. 1.83

В заключение выполнения этого исследовательского задания можно провести дискуссию в классе по обсуждению найденных решений и проведению обобщения проблемы построения трехточечных прямых. Все приведенные задачи можно обобщить так: есть целое число точек P $(P > 3)$. Как можно расположить их на плоскости, чтобы никакие четыре из них не лежали на одной прямой и чтобы максимальное число прямых проходило через три из данных точек? (Последнее требование при решении нашей серии задач учитывается не всегда.) Полное описание этой проблемы можно найти в книге «Математический цветник».

Рассмотрим некоторые обобщения, которые можно сделать после выполнения этого задания.

Дано целое положительное число p. Как расположить на плоскости точки $(p \geq 3)$,чтобы никакие четыре из них не принадлежали одной прямой и чтобы было максимальное число прямых, проходящих через три из имеющихся точек каждая? Интересующее нас максимальное число *«трехточечных»* прямых обозначим $l(p)$.

Эта задача относится к области математики, называемой комбинаторной геометрией. На вышеприведенных рисунках показаны некоторые варианты решения задачи, отвечающие значениям $p = 3, 4, ..., 11$. Все они оптимальны, т. е. содержат в точности $l(p)$ прямых, проходящих через три точки каждая. Кроме показанных на рисунке изображений ($l(3) = 1$, $l(4)= 1$, $l(5) = 2$, $l(6) = 4$, $l(7) = 6$, $l(8) = 7$, $l(9) = 10$, $l(10) = 12$, $l(11) = 16$), науке известны еще только два значения этой функции.

Перечислим некоторые особенности рассмотренной нами части общей задачи:

- четыре точки в нашей системе ничем не лучше трех, так как $l(3) = l(4)$;
- иногда одно решение содержится в другом: так, рисунок, характеризующий значение $l(10)$, содержится в рисунке, характеризующем $l(11)$;
- решения, показанные на приведенных выше рисунках, не всегда единственны, на рис. 1.84 показано другое расположение $l(8)$ прямых, полученное из расположения, отвечающего $l(7) = 6$, дополнительную точку можно поставить на новой прямой произвольно.

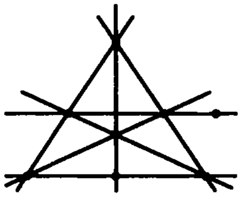


Рис. 1.84

В книге «Математический цветник» можно найти изображения еще двух решений для $p = 12$ и $p = 16$, но это уже очень сложно получаемые и трудно изображаемые конфигурации. Интересно, что эти последние две конфигурации исчерпывают все известные значения $l(p)$. Важно ощущать, что мы приблизились к проблеме, которая в математике еще открыта для исследования.

1.5.4. Четырехточечники

1.112. *Решение.* 1. Будем считать, что замки у нас точки, а стены — прямые. Тогда исходный план строителя, в котором он расположил 10 точек на 5 прямых по 4 точки на каждой показан на рис. 1.85, *а*. Нам нужно часть башен убрать в верхнюю часть треугольника.

2. Уберем прямые (1, 3), (1, 10), (3, 8) (рис. 1.85, *б*). Осталось 4 прямые, на прямых (2, 5) и (2, 4) по 4 точки.

3. Уберем теперь прямые (4, 10) и (5, 8). Вместо них проведем прямые (4, 6) и (5, 7) (рис. 1.85, *в*).

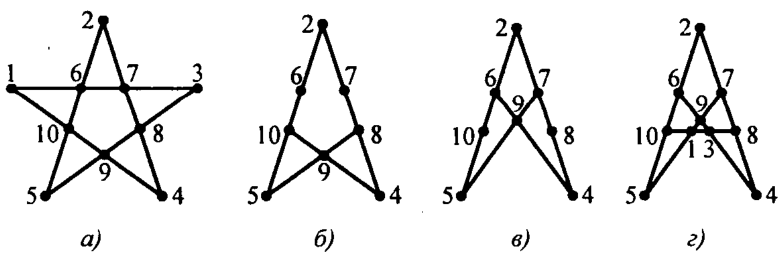
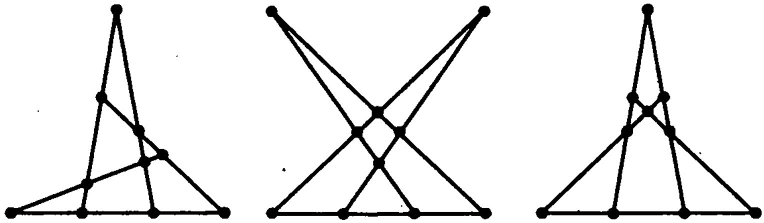


Рис. 1.85

4. Точка пересечения прямых (5, 8) и (4, 10) будет точкой пересечения прямых (4, 6) и (5, 7).

5. Проведем прямую (8, 10). Если случайно точка 9 попадет на эту прямую, мы сместим точки 8 и 10 немного ниже, и тогда прямая (8, 10) пересечет прямые (4, 6) и (5, 7) в точках 1 и 3 соответственно (рис. 1.85, *г*).

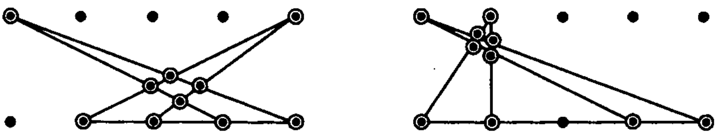
Мы представили один из способов расположения 10 точек на 5 прямых. Остальные способы показаны на рис. 1.86.



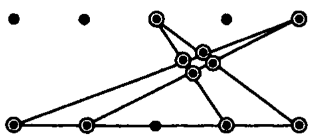
а) *б)* *в)*

Рис. 1.86

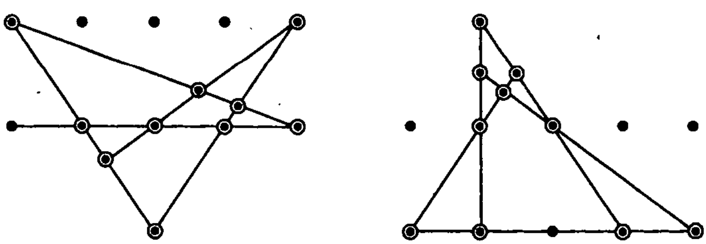
1.113. Эта задача является интересной проблемной задачей.



а) *б)*



в)



г) *д)*

Рис. 1.87

Сформулируем некоторые общие замечания к ее решению.

1. В решении этой задачи не требуется симметричное расположение шашек. Приведем примеры 5 различных решений (рис. 1.87). Решения считаются различными, если они приводят к различным конфигурациям из данных 10 шашек (рис. 1.87).

2. Эти 5 решений не исчерпывают все возможные решения данной задачи. Для решения задачи можно выбрать разные комбинации шашек, предназначаемых для перемещения (рис. 1.87, *а*, *б*, *в*, *д*), и по-разному размещать одну и ту же избранную группу шашек (рис. 1.87, *а* и *г*).

3. Допустим, мы взяли для перекладывания 3 шашки из верхнего ряда и 1 из нижнего. Всевозможные сочетания шашек по 3 (из пяти) уже дают 10 различных комбинаций. А присоединение к любой из этих комбинаций еще по одной какой-либо шашке из нижнего ряда дает каждый раз по 5 групп. Так можно получить $10 \cdot 5 = 50$ различных группировок по 4 шашки, предназначаемых для перемещения.

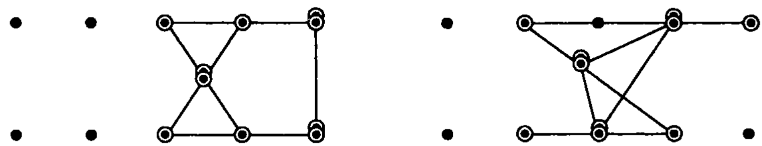


Рис. 1.88

Опишем *первую игру*, связанную с решением этой задачи. Организуйте такую игру-соревнование. Разложите перед каждым участником игры по 10 шашек (можно нарезать из картона) в два ряда, и пусть каждый (не показывая остальным) у себя переместит 4 шашки (3 из одного ряда и 1 из другого) так, чтобы образовалось 5 рядов по 4 шашки в каждом ряду. Затем сравните решения. Те из игроков, у которых оказались одинаковые конфигурации шашек, получают по одному очку; конфигурация шашек, отличающаяся от всех остальных, оценивается в 2 очка. Не решившие задачу в отведенное время не получают ни одного очка. Повторив игру несколько раз, подсчитываете сумму очков у каждого участника игры и определяете победителей.

Можно провести эту игру и совсем без шашек. Раздать каждому участнику игры по листу бумаги и по чертежной линейке. Шашки заменить точками на бумаге, расположив их первоначально тоже в 2 ряда по 5 точек. Игра будет заключаться в том, чтобы, вычеркнув какие-либо точки из одного ряда и 1 из другого, изобразить вместо них новые 4 точки так, чтобы вместе с остальными (без вычеркнутых, разумеется) они образовывали 5 рядов по 4 точки в каждом ряду.

Еще одно дополнение к первой игре. Можно разрешить брать 4 шашки, по 2 из каждого ряда, и накладывать одну шашку на другую. Тогда возможны будут и такие, например, решения, как на рис. 1.88, в связи с этим дополнительным соглашением количество возможных решений задачи значительно увеличивается.

Указание к выполнению первого варианта игры. Любое из возможных решений задачи о перемещении четырех шашек (из десяти, расположенных в 2 ряда) так, чтобы образовалось 5 рядов по 4 шашки в каждом, можно легко и быстро получить при помощи несложных геометрических построений.

Замените шашки точками на листе бумаги и зачеркните какие-нибудь три верхние и одну нижнюю точки. Первую из оставшихся двух точек верхнего ряда соедините прямыми линиями с какими-либо двумя точками нижнего ряда, а вторую точку верхнего ряда — с остальными двумя точками нижнего ряда (рис. 1.89). Избегайте при этом таких комбинаций точек, которые приводят к параллельным линиям, тогда вы обязательно получите 4 точки пересечения четырех проведенных линий. В образовавшихся точках пересечения и следует для решения задачи поместить 4 шашки, соответствующие зачеркнутым точкам.

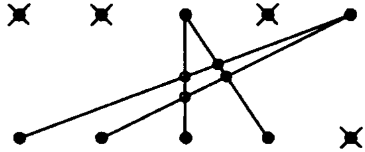


Рис. 1.89

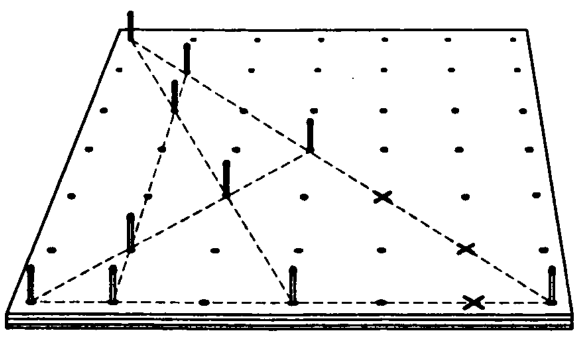


Рис. 1.90

Вторая игра. На листе картона наколите 36 небольших отверстий в виде квадратной решетки. В 10 отверстий вставьте по спичке, как указано на рис. 1.91. Содержание игры заключается в решении задачи, например, такой. Вынуть какие-либо 3 спички и поместить их в другие отверстия картонного листа так, чтобы образовалось 5 рядов по 4 спички в каждом ряду.

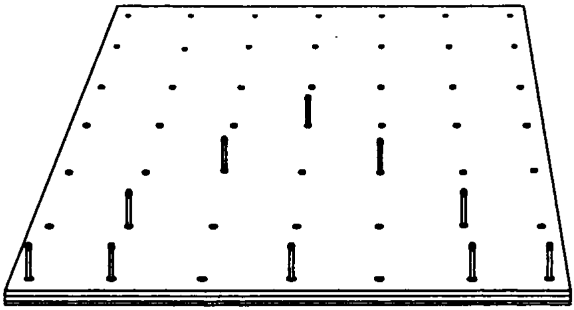


Рис. 1.91

Решите сначала эту задачу для случая, изображенного на рис. 1.91, а потом можете ее разнообразить, изменяя первоначальное расположение спичек и число рядов, которые вновь должны быть образованы.

Указания к выполнению второй игры. В качестве «поля» для решения предложенной задачи пригоден пластилин.

Решение задачи о расположении спичек в отверстиях листа картона или пластилина (игра вторая) показано на рис. 1.90.

1.114. *Решение.* 1. Два ряда должны пересекаться между собой. На каждом из этих двух рядов должны располагаться по 4 монеты. Итого мы разместили 7 монет в 2 ряда.

У нее осталось 5 монет, которые мы должны разместить в 4 ряда.

3. Это возможно только в том случае, если каждый последовательно построенный ряд пройдет через 2 монеты, принадлежащие к уже построенным рядам, а также эти ряды будут попарно пересекаться (рис. 1.92).

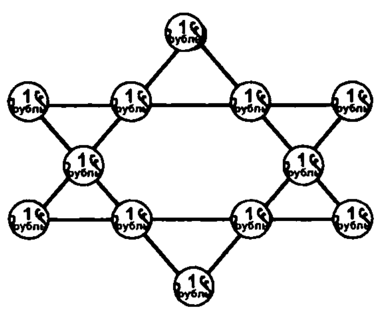


Рис. 1.92

1.116. *Решение.* Примем розы за точки, а ряды — за прямые. Поскольку в условии задачи сказано, что у нас 16 роз, а интуиция подсказывает, что надо попробовать расположить эти точки красиво, может быть, симметрично, попробуем образовать 3 пятиугольника с общим центром.

1. Построим сначала первый пятиугольник и отметим его центр (рис. 1.93, *а*).

2. Продолжим стороны этого пятиугольника. Образуются точки пересечения, которые будут являться вершинами нового пятиугольника (рис. 1.93, *б*).

3. Соединим точки 7 и 8, 8 и 9, 9 и 10, 10 и 11, 7 и 11 прямыми (рис. 1.93, *в*) и затем стороны этого пятиугольника также продолжим.

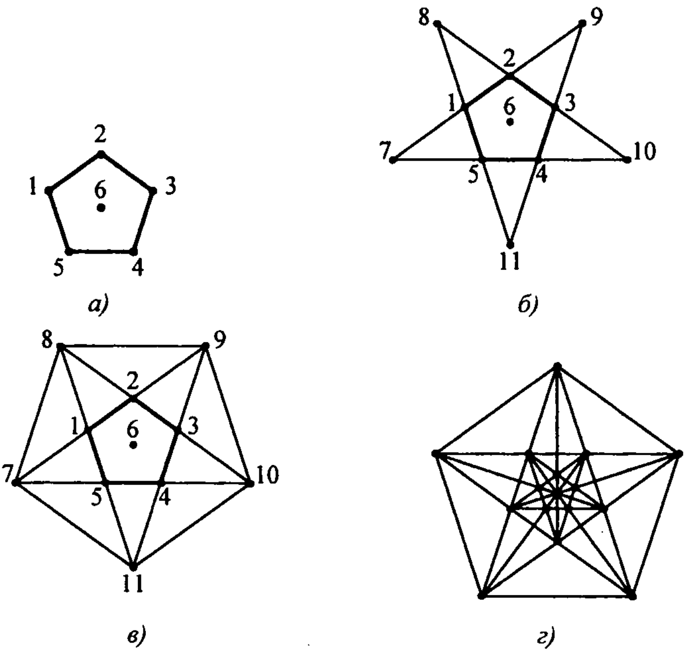


Рис. 1.93

Образуются вершины еще одного пятиугольника (рис. 1.93, *в*). Итого получили 16 точек и 10 прямых, проходящих через эти точки.

4. Нам осталось провести еще 5 прямых. Через центр пока еще ни одной прямой не проведено. Поэтому проведем еще 5 прямых так, чтобы каждая из них прошла через центры всех пятиугольников. Они пройдут через тройки следующих точек: (1, 6, 10), (2, 6, 11), (3, 6, 7), (4, 6, 8), (5, 6, 9). В итоге получим конфигурацию, изображенную на рис. 1.93, *г*.

1.6. ВЗАИМНОЕ РАСПОЛОЖЕНИЕ ТОЧЕК И ПЛОСКОСТЕЙ. АКСИОМА ПЛОСКОСТИ.

1.117. Плоскости β принадлежат точки A и B. Точки C и D не принадлежат плоскости β.

1.119. Вне данной плоскости содержится бесчисленное множество точек.

1.121. Решение этой задачи нами полностью подготовлено, так как оно опирается на рассмотрение вопроса о взаимном расположении трех точек.

1.122. Главное условие, которое определяет плоскость — это наличие трех точек, не лежащих на одной прямой.

1.123. Если в пространстве существуют две точки, то в соответствии с аксиомой прямой известно, что через них проходит единственная прямая. На рис. 1.94 прямая AB принадлежит нескольким плоскостям.

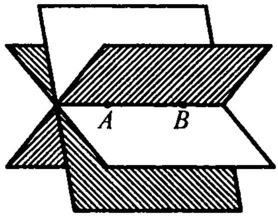


Рис. 1.94

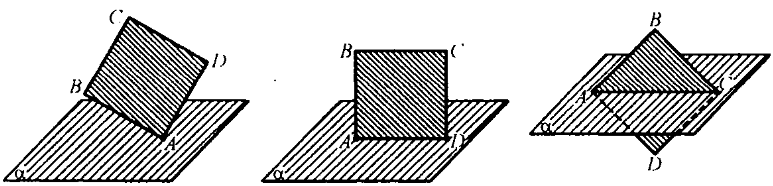
1.126. Через данную точку можно провести бесконечное множество плоскостей.

1.128. Эта задача может быть решена в 5–6-м классе лишь на наглядном уровне, с использованием моделей геометрических фигур, так как полное обоснование пока невозможно.

а) Да, плоскости α может принадлежать только одна вершина квадрата: $A \in \alpha$ (рис. 1.95, *а*);

б) Да, плоскости α могут принадлежать только две вершины квадрата: $A \in \alpha$, $D \in \alpha$ (рис. 1.95, *б*), хорошо, если учащиеся увидят и случай, изображенный на рис. 1.95, *в*): $A \in \alpha$, $C \in \alpha$;

в) Только три вершины квадрата $ABCD$ не могут принадлежать плоскости α, так как в этом случае весь квадрат лежит в плоскости α.



а) *б)* *в)*

Рис. 1.95

1.129. При решении этой задачи учащийся «выдвигает некоторую идею» (мысль, метод, прием, способ и т.д.), которая является нестандартной (она не выделена в учебнике, не записана в тетрадия. В данном случае это связано с рассмотрением противолежащих (противоположных) вершин куба.

Ответ: второй играющий при правильной «стратегии» игры всегда выигрывает. У каждой вершины куба есть противоположная ей вершина. Так, на рис. 1.96 для вершины A противоположной является C_1, а для вершины D противоположной будет B_1. Две противоположные вершины не лежат в одной грани (например, на рисунке вершина A лежит в трех гранях $ABCD$, ABB_1A_1, AA_1D_1D. Однако противоположная вершина C_1 не лежит ни в одной из этих граней). Возникает идея: второй играющий должен придерживаться следующей стратегии: как только первый играющий отметит какую-либо вершину куба, второй отмечает противоположную вершину. Тогда какие бы три последовательно отмеченные вершины мы ни взяли, среди них будут две противоположные вершины куба. Следовательно, эти три вершины не лежат в одной грани куба. Таким образом, при «любом ходе» первого игрока всегда выигрывает второй (при условии нашей стратегии игры).

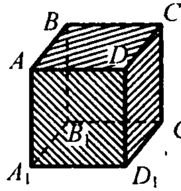


Рис. 1.96

1.130. Следует воспользоваться результатами решения задачи 1.24.

1.7. ВЗАИМНОЕ РАСПОЛОЖЕНИЕ ТОЧЕК, ПРЯМЫХ И ПЛОСКОСТЕЙ. АКСИОМЫ ПРЯМОЙ И ПЛОСКОСТИ

1.131. Точки прямой принадлежат плоскости.

1.132. 1. Точка A не лежит в гранях DCC_1D_1, BCC_1B_1 и $A_1B_1C_1D_1$. 2. Точка C_1 лежит в трех гранях, в грани DCC_1D_1, BCC_1B_1, $B_1C_1D_1A_1$. 3. Точка D принадлежит трем плоскостям: DCC_1D_1; $ABCD$; ADD_1A_1. 4. Прямая AD_1 принадлежит грани ADD_1A_1. 5. Прямая D_1C принадлежит грани DCC_1D_1. 6. Например, прямая CC_1.

1.133. а) В одной полуплоскости лежат точки A, D и C;

б) В разных полуплоскостях лежат, например, точки B и D, B и A.

1.134. 1. Не обязательно. 2. Не верно.

1.135. Две точки этой прямой должны лежать в плоскости α.

1.136. Прямая AB лежит в плоскости.

1.137. Прямая может лежать в плоскости, может иметь с плоскостью только одну общую точку, не иметь общих точек с плоскостью.

1.138. 1. Верно. 2. Верно. 3. Верно. 4. Не верно.

1.139. Полуплоскость и полупространство имеют границу.

1.140. Сторона AB лежит в плоскости.

1.141. Можно.

1.143. Бесконечное множество плоскостей содержит эту прямую.

1.145. Прямая AB лежит в плоскости α.

1.146. Прямая и плоскость могут не иметь общих точек, иметь только одну общую точку, иметь бесконечное множество общих точек.

1.147. Мы уже подробно рассматривали случаи взаимного расположения четырех точек.

а) Если точки A, B, C и D лежат в одной плоскости, то они определяют 1, 4 или 6 прямых.

б) Если точки A, B, C и D не лежат в одной плоскости, то они могут определять 6 прямых, т.е. быть вершинами треугольной пирамиды.

1.148. Бесконечное множество прямых.

1.149. На рисунках 1.97 изображены случаи взаимного расположения точек A и B и плоскости α.

В случае на рис. 1.97, *а* мы имеем одну прямую и одну общую точку.

В случае на рис. 1.97, *б* мы имеем одну прямую и не имеем общих точек. В случае на рис. 1.97, *в* мы имеем одну прямую и одну общую точку.

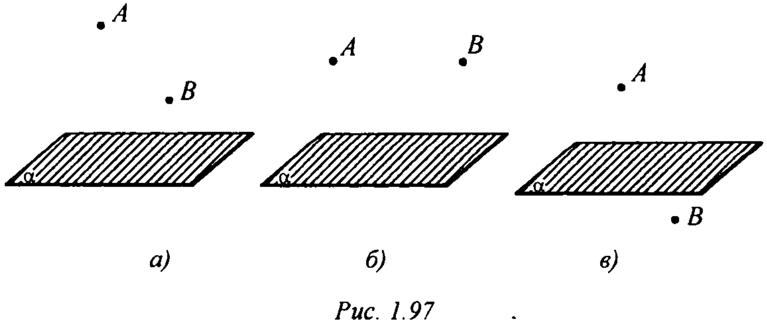


Рис. 1.97

1.150. Три прямые: CS, CB, CA.

1.151. Четыре прямые.

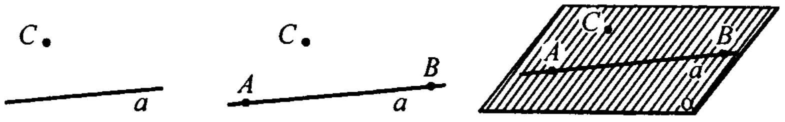
1.152. а) Нет. б) Прямая AB.

1.154. Прямые l_1 и l_2 скрещивающиеся.

1.155. Доказательство:

1. Прямая a. (дано)
2. Точка C, не лежащая на прямой a. (рис. 1.98, a)

3. Мы хотим доказать, что через прямую a и точку C можно провести единственную плоскость (требуется доказать).



а) *б)* *в)*

Рис. 1.98

Вспомним аксиому плоскости: *три точки, не лежащие на одной прямой, задают единственную плоскость.* Одна точка у нас есть — точка C. Где взять еще две точки? Возникает идея: построить еще две точки A и B.

Причем эти точки нужно построить на прямой a, иначе эта прямая не будет участвовать в доказательстве.

4. Построим на прямой a две точки A и B (построение) (рис. 1.98, *б*).

5. Мы имеем три точки — A, B и C (2, 4).

6. Через точки A, B и C проходит единственная плоскость α (рис. 1.98, *в*) (5, аксиома плоскости).

Содержит ли плоскость α прямую a? Нужно вспомнить аксиому прямой и плоскости.

7. Прямая a имеет с плоскостью α две общие точки A и B, значит, $a \subset \alpha$ (1, 4, 6, аксиома прямой и плоскости).

8. Таким образом, плоскость α — искомая плоскость, проходящая через прямую a и точку C (6, 7).

Мы построили нужную нам плоскость α.

В условии теоремы сказано, что такая плоскость может быть только одна, а мы еще не доказали этого. Докажем единственность.

Предположим, что мы провели другую плоскость β, проходящую через точку C и прямую a. Эта плоскость (3 должна обязательно содержать точки A, B и C. Но точки A, B и C определяют единственную плоскость α (аксиома плоскости), а значит, $\alpha = \beta$.

1.8. ВЗАИМНОЕ РАСПОЛОЖЕНИЕ ПЛОСКОСТЕЙ

1.156. 1. Прежде всего на рис. 1.37 не изображена передняя плоскость. Мы видим 8 пар пересекающихся плоскостей.

2. 3 пары параллельных плоскостей.

3. Всего видно пять плоскостей.

1.157. Плоскости α и β пересекаются по прямой а.

1.158. Три пары.

1.159. Три взаимно пересекающиеся плоскости.

1.160. Плоскости должны иметь общую точку.

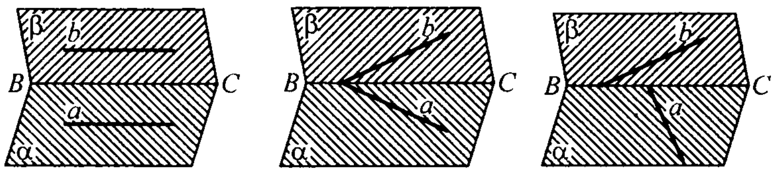
1.161. Все случаи расположения прямых возможны.

1.162. 1. Не верно, эти прямые могут быть параллельными.

2. Это высказывание истинно.

1.163. Точки P и O должны принадлежать прямой AB.

1.164. Все случаи возможны (рис. 1.99).



а) *б)* *в)*

Рис. 1.99

1.165. Случай б) не возможен.

1.166. У треугольной пирамиды 4 грани.

1.167. Может.

1.168. Прямая, проходящая через две точки, принадлежащие каждой из рассматриваемых плоскостей, будет целиком лежать в каждой из этих плоскостей (по аксиоме прямой к плоскости). Следовательно, если две различные плоскости имеют две общие точки, то они имеют и общую прямую, проходящую через эти точки.

1.170. Можно по-разному подходить к решению данного задания. Мы подскажем только одну идею. Посмотрите на вашу комнату: две плоскости — например, пол и потолок, три плоскости — например, пол и две стены.

1. Рассмотрим случай, когда в пространстве нам даны две плоскости.

а) Если у вас обыкновенная комната, то вы видите, что эти две плоскости могут быть параллельны (не иметь общих точек) и делить пространство на части 1, 2 и 3 (рис. 1.100)

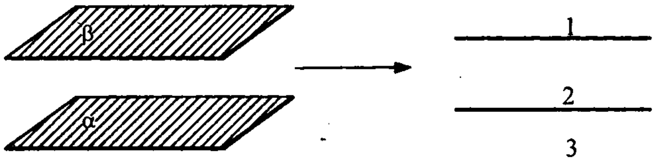


Рис. 1.100

б) Если двумя плоскостями будут пол и одна из стен, то эти две плоскости разбивают пространство на части 1, 2, 3 и 4 (рис. 1.101).

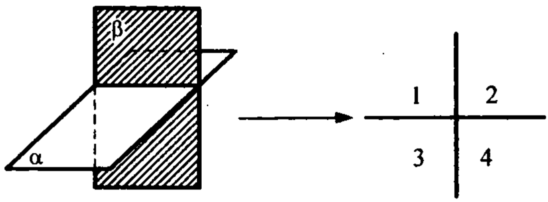


Рис. 1.101

Итак, в случае а) мы имели три части, а в случае б) — четыре. Таким образом, максимальное количество частей, на которые две плоскости разбивают пространство, — четыре. Это свойство мы получим в результате сравнения и обобщения.

2. Рассмотрим возможные случаи расположения трех плоскостей в пространстве, основываясь на нашем опыте и наблюдениях:

а) Если три плоскости в пространстве параллельны друг другу (рис. 1.102), то нарисовав вид спереди, получим четыре части.

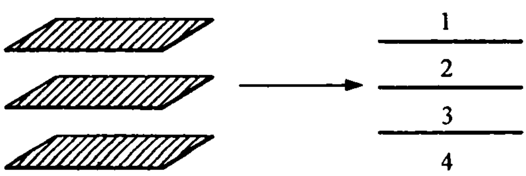


Рис. 1.102

б) Если две плоскости параллельны, а третья их пересекает (рис. 1.103), то нарисовав вид спереди, получим шесть частей.

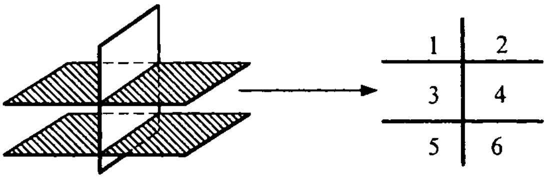
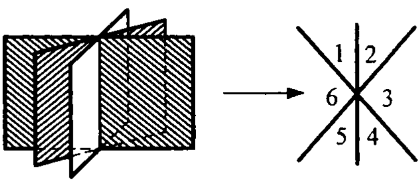


Рис. 1.103

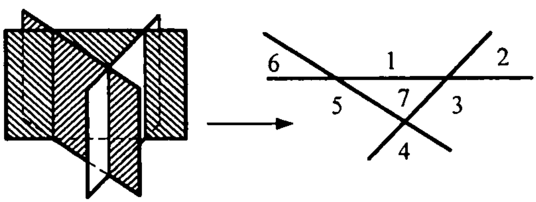
в) Если среди трех плоскостей в пространстве нет двух параллельных, то в этом случае получаем шесть (рис. 1.104, *а*), семь (рис. 1.104, *б*) или восемь (рис. 1.104, *в*) частей.

Выполнение этого исследовательского задания практически не требует специальных знаний. Учащимся нужно лишь внимание, смекалка и воображение. Сразу получить и обосновать полный ответ трудно, но важно начать исследование, которое в дальнейшем будет продолжаться.

а)



б)



в)

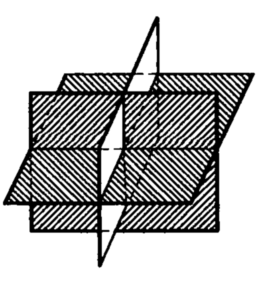


Рис. 1.104

Глава 2
ОБЩИЕ ПРЕДСТАВЛЕНИЯ О ГЕОМЕТРИЧЕСКИХ ФИГУРАХ

2.1. ПОНЯТИЕ ГЕОМЕТРИЧЕСКОЙ ФИГУРЫ. ОБЪЕДИНЕНИЕ И ПЕРЕСЕЧЕНИЕ ГЕОМЕТРИЧЕСКИХ ФИГУР

2.3. 1) Точка A; 2) прямая AB; 3) плоскость α.

2.4. Не может.

2.5. Может.

2.6. Может.

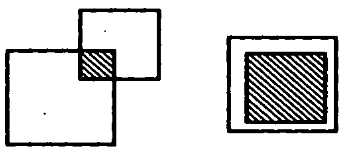
2.7. Не может.

2.8. а, б) Не может; в) может; г) не может.

2.9. Бесконечное число плоскостей должно пересекаться по одной прямой.

2.10. а) Точка — если кубы расположены один вне другого и имеют общими одну вершину или точку ребра; б) отрезок — если ребро одного куба принадлежит грани или ребру другого куба; в) квадрат — если грань одного куба является частью грани другого.

2.13. См. рис. 2.32, *а, б*.



а) *б)*

Рис. 2.32

2.14. В верхнем слое имеется два параллелепипеда, передняя грань каждого из которых является квадратом. Умножим это на два — $2 \cdot 2 = 4$. Аналогично поступаем с правой и верхней гранями (итого $2 \cdot 2 + 2 \cdot 2 = 4 + 4 = 8$, $8 + 4 = 12$). Далее куб можно представить разрезанным тремя плоскими разрезами сверху, спереди и сбоку на параллелепипеды, одно измерение которых равно ребру куба, а два других — удвоенному ребру ($2 \cdot 3 = 6$). Результаты суммируются ($12 + 6 = 18$). Можно поступить и так: 6 больших параллелепипедов содержат по два маленьких. Значит, всего будет $6 + 6 \cdot 2 = 18$ параллелепипедов.

2.15. Мысленно в каждом случае посчитаем, сколько кубиков помещается в выемку.

1. На рис. 2.5, *а* не хватает лишь одного кубика. На рис. 2.5, *б* не хватает двух кубиков во втором слое и четырех кубиков в

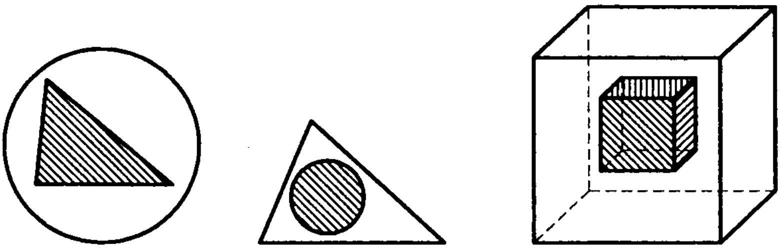
третьем слое. На рис. 2.5, *в* не хватает во втором слое 4 кубика, в третьем слое — 6 кубиков, в четвертом — 8 кубиков.

2.16. 10 кубиков.

2.17. При пересечении двух произвольных четырехугольников может получиться: 1) точка; 2) отрезок; 3) треугольник; 4) четырехугольник; 5) пятиугольник; 6) шестиугольник.

2.18. а) Треугольник находится внутри круга; б) круг помещен внутри треугольника; в) куб расположен внутри куба; см. рис. 2.33, *а–в*) пирамида находится внутри пирамиды.

2.19. Наиболее простой ответ — цилиндр (конус) внутри цилиндра (конуса).



а) *б)* *в)*

Рис. 2.33

2.20. а) Два одинаковых треугольника, имеющих одну общую точку (можно рассмотреть взаимное расположение треугольников в разных плоскостях); б) пересечение двух пространственных фигур, например, двух кубов, когда пересечение происходит по граням; в) две полуплоскости с общей границей.

2.21. На 7 частей. См. рис. 2.34.

2.22. 8 частей. См. рис. 2.35.

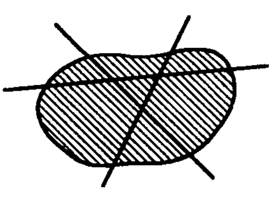


Рис. 2.34

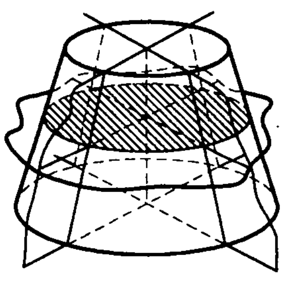


Рис. 2.35

2.23. Например, при $n = 4$ всего 64 кубика: 8 неокрашенных, 8 — с тремя окрашенными гранями, 24 — с двумя окрашенными гранями и 24 — с одной окрашенной гранью.

2.26. а) 4; б) 7; в) 6; г) 8.

2.27. а) Треугольник; б) треугольник, четырехугольник; в) треугольник, четырехугольник, пятиугольник, шестиугольник; г) треугольник, четырехугольник, пятиугольник, шестиугольник, семиугольник.

2.28. Пусть точки X и Y принадлежат общей части данных кругов — фигуре F. Все точки отрезка XY принадлежат как первому, так и второму кругу. Следовательно, отрезок XY принадлежит фигуре F. Из этого следует, что фигура F выпуклая.

2.29. Доказательство.

1. F_1 и F_2 — выпуклые фигуры (дано) (рис. 2.36).

2. Докажите, что фигура $F_1 \cap F_2$ — выпуклая.

3. Обозначим пересечение фигур F_1 и F_2 через F. (рис. 2.36).

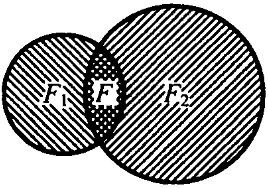


Рис. 2.36

4. Если точки X и Y принадлежат фигуре F, то точки X и Y принадлежат фигуре F_1 и фигуре F_2 (1, 2, определения пересечения фигур).

5. Отрезок XY принадлежит фигуре F.

6. Фигура F — выпуклая (4, 5, определения выпуклой фигуры).

2.30. 1 — в; 2 — а; 3 — г; 4 — ж; 5 — е; 6 — б; 7 — з; 8 — д.

2.2. ВЗАИМНОЕ РАСПОЛОЖЕНИЕ ПЛОСКОСТЕЙ И ГЕОМЕТРИЧЕСКИХ ФИГУР

2.35. Всегда.

2.36. Не всегда.

2.37. Не лежат.

2.38. Может.

2.40. Например, через две параллельные диагонали противоположных граней.

2.41. Точка, отрезок, треугольник, четырехугольник, пятиугольник, шестиугольник.

2.3. ИЗОБРАЖЕНИЕ ГЕОМЕТРИЧЕСКИХ ФИГУР

2.46. При расположении куба прямо перед глазами видна только передняя грань и все ребра, принадлежащие этой грани: переднее правое, левое, верхнее, нижнее. Не видны остальные пять граней и восемь ребер.

2.48. а) Одну грань куба можно увидеть, расположив его прямо перед глазами, т.е. глядя спереди; б) две грани куба можно увидеть спереди справа, справа сверху, слева сверху и т.д.; в) три грани куба можно увидеть, например, спереди справа сверху, спереди слева снизу.

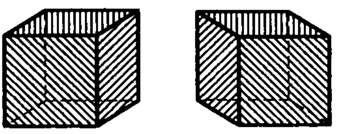
2.50. Случаи а), *б*), *д*) (рис. 2.15) неправильные. Правильными являются изображения *в*) и *г*). Для каждого из них полезно уточнить, откуда виден куб: *в*) спереди справа сверху, *г*) спереди слева снизу.

2.51. Можно.

2.52. Ребра, которые нам не видны, изображаются пунктиром, а видимые — сплошными линиями. У видимых граней все ребра видимые, т.е. сплошные, а у невидимых граней есть невидимые ребра.

2.59. а) Куб слева снизу. Не видны грани: передняя, задняя, верхняя, правая. Не видны ребра: заднее верхнее и заднее правое; переднее верхнее и переднее правое ребра; правое верхнее ребро. Аналогично поступаем и в случаях б)–г).

2.60. На рис. 2.37, *а* видны передняя, верхняя и правая грань, на рис. 2.37, *б* видны передняя, верхняя и левая грани.



а) *б)*

Рис. 2.37

2.61. На рис. 2.23 помещены верные изображения куба: а) вид спереди, б) вид спереди справа.

2.62. Обычно дорисовывают фигуру на рис. 2.24, не видя никакой ловушки. Она становится ясна только при взгляде на рис. 2.25, *а*. Таких фигур, как на рис. 2.25, *а*, в реальности не существует.

2.63. Фигуры, изображенные на рис. 2.25, существовать не могут.

2.64. Нельзя.

2.65. См. рис, 2.38, *а–в*.

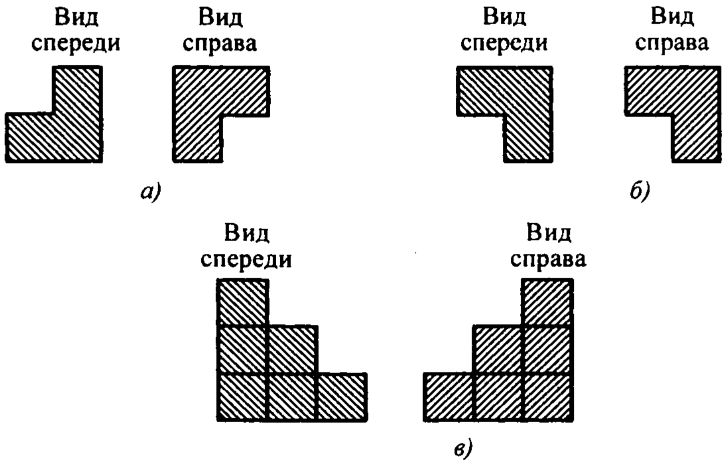


Рис. 2.38

2.66. См. рис. 2.39, *а–в*.

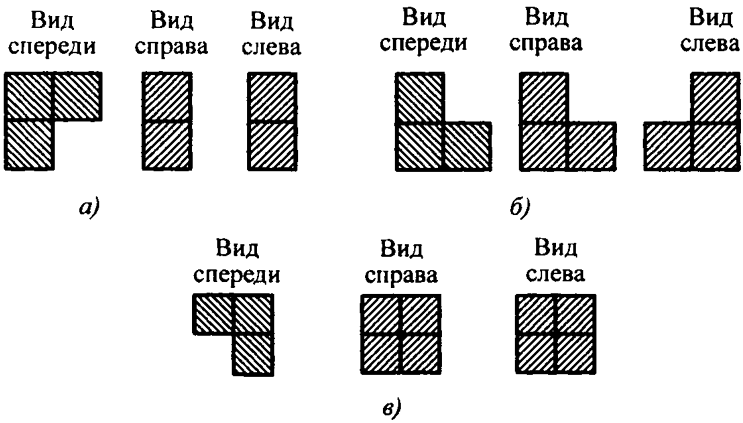


Рис. 2.39

2.67. См. рис. 2.40.

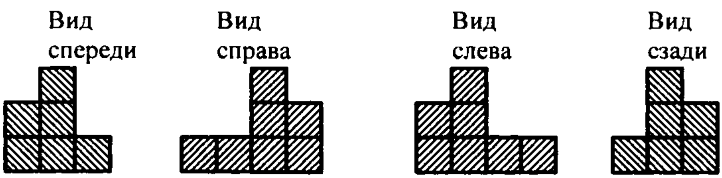


Рис. 2.40

2.68. Ошибочным является изображение на рис. 2.30, *в*.

2.69. Парные для *A*: *1, 7, 8;* для *B* — нет; для *C* — *1, 7, 8*.

Глава 3
ОТРЕЗКИ И ИХ ИЗМЕРЕНИЕ

3.1. ПОНЯТИЕ ОТРЕЗКА

3.1. Точки *A* и *B* называются началом и концом отрезка.

3.2. 1) 3 отрезка; 2) 12 ребер.

3.3. См. ответ к задаче 3.2.

3.4. а) Отрезок пересекает прямую, если он имеет с ней единственную общую точку; б) аналогично п. а); в) отрезок не пересекает прямую, если он не имеет с ней общих точек; г) аналогично п. б).

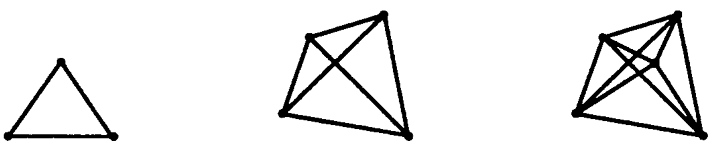
3.5. а) Отрезок лежит в одной полуплоскости, задаваемой данной прямой, если он не имеет с этой прямой общих точек.

3.6. Могут. Это диагонали граней куба и диагонали самого куба.

3.7. Не существуют.

3.8. На рис. 3.5, *а* имеется 6 отрезков. На рис. 3.5, *б* — 2 отрезка. На рис. 3.5, *в* — 6 отрезков, на рис. 3.5, *г* — отрезков нет.

3.9. Для решения этой задачи требуется выполнить несложные построения и получить ответ: в случае рис. 3.6, *а* получим 3 отрезка; в случае рис. 3.6, *б* — 6 отрезков, а в случае рис. 3.6, *в* — 10 отрезков (рис. 5.8, *а–в*).



а) *б)* *в)*

Рис. 3.22

3.10. 1. Отрезок может принадлежать прямой (рис. 3.23, *а*). 2. Прямой может принадлежать лишь один из концов отрезка (рис. 3.23, *б*). 3. Отрезок может пересекать прямую (рис. 3.23, *в*). 4. Отрезок может быть параллелен прямой (рис. 3.23, *г*).

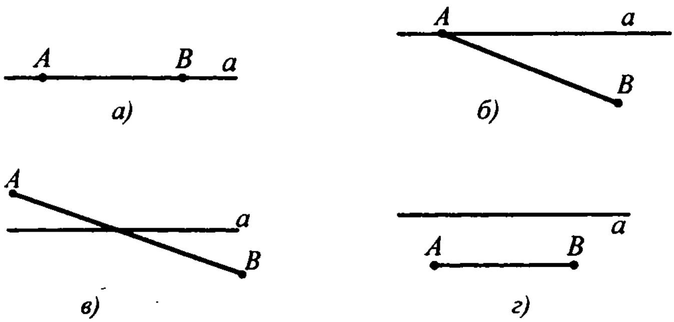


Рис. 3.23

3.11. а) Отрезок может лежать в плоскости (рис. 3.24, *а*).

б) Отрезок может пересекать плоскость (рис. 3.24, *б*).

в) Отрезок может быть параллелен плоскости (рис. 3.24, *в*).

в) Плоскости может принадлежать лишь один из концов отрезка (рис. 3.24, *г*).

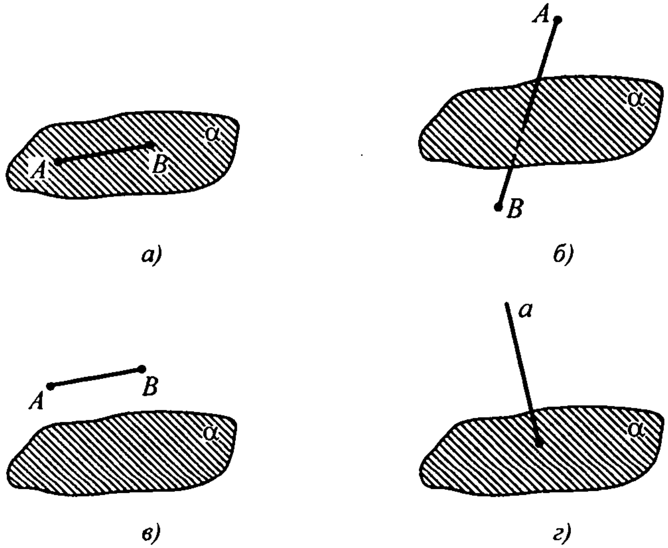
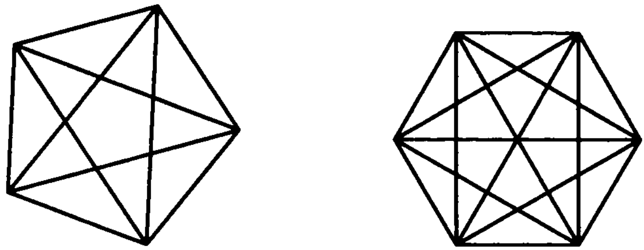


Рис. 3.24

3.12. Нужно вспомнить соответствующие задачи о расположении двух, трех и четырех точек на плоскости и в пространстве, и в каждом случае провести нужные отрезки.

3.13. В случае рисунка 3.7, *а* мы получим 10 отрезков (рис. 3.25, *а*). В случае рисунка 3.7, *б* мы получим 15 отрезков.



а) *б)*

Рис. 3.25

3.14. а) Есть 3 различных отрезка, оба конца которых принадлежат фигуре, состоящей из точек A, B и C; б) есть 6 различных отрезков, оба конца которых принадлежат фигуре, состоящей из точек A, B, C и D.

3.15. 7 отрезков.

3.16. 8 отрезков.

3.17. 1. Две точки на прямой задают один отрезок.

2. Если на прямой даны 3 точки, то получается 3 отрезка: AB, BC и AC. Важно, чтобы учащиеся в этом случае увидели и посчитали и отрезок AC (рис. 3.26).

Случаи с четырьмя и пятью точками на прямой являются чрезвычайно важными, так как при их рассмотрении появляется возможность познакомить учащихся с элементами алгоритмической деятельности и построить алгоритм подсчета получившихся отрезков, так как считать «вслепую» бессмысленно.

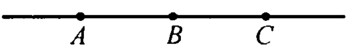


Рис. 3.26

Поиск решения этой задачи является прекрасным примером аналитической деятельности, которая сводится к тому, что учащиеся должны постараться самостоятельно найти эффективный способ подсчета отрезков.

Рассмотрим подробно случай с четырьмя точками.

1. Есть четыре точки A, B, C и D, принадлежащие прямой a (рис. 3.27, *а*).

2. Пронумеруем маленькие отрезки (рис. 3.27, *б*).

3. Мы сразу видим отрезок AD и три маленьких отрезка, то есть 4 отрезка (рис. 3.27, *в*).

4. Теперь надо рассмотреть все комбинации из маленьких отрезков: это отрезок, состоящий из отрезков 1 и 2, 2 и 3, т.е. 2 отрезка.

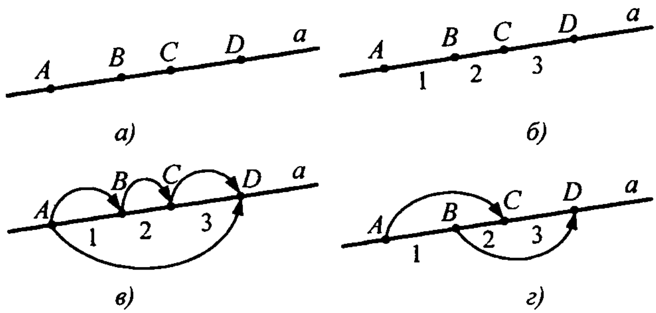


Рис. 3.27

5. Итого мы имеем 6 отрезков.

3.18. 1. Чтобы на прямой получить три отрезка, нужно отметить на этой прямой три точки.

2. Если на прямой надо получить n отрезков, то можно найти число необходимых точек, решив уравнение $\frac{k(k-1)}{2}=n$ относительно k.

Можно найти значение k подбором так, чтобы оно удовлетворяло неравенству $1+2+...+(k-1)\geq n$.

3.19. Доказательство следует из аксиомы прямой.

3.20. Решение видно на рис. 3.28.

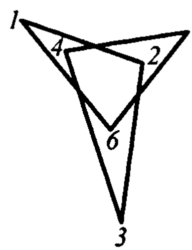


Рис. 3.28

3.21. а) Множество всех точек отрезка AB, кроме точки B; б) точка, которая является серединой отрезка AB; в) отрезок AC, где C — середина отрезка AB; г) все точки отрезка AB, кроме его середины.

3.22. а) Все точки луча BA, кроме внутренних точек отрезка AB и точки B; б) все точки луча AB, кроме внутренних точек отрезка AB и точки A; в) множество точек отрезка AB.

3.23. В треугольной пирамиде и кубе из одной вершины исходят 3 отрезка (ребра); в многограннике, полученном объединением двух четырехугольных пирамид (у них совпадают основания), из каждой вершины исходят по 4 отрезка; в произвольной пирамиде из ее вершины может исходить n отрезков (ребер). Получится n-угольная пирамида.

3.24. См. рис. 3.29, *а, б.*

3.25. Треугольная пирамида. Наименьшее число ребер — 6, Эта пирамида имеет 4 грани и 4 вершины.

а) *б)*

Рис. 3.29

3.27. *Решение.* Если на прямой имеется n точек, то они разбивают прямую на $n + 1$ частей. Получена формула: $L(n)=n + 1$, где $L(n)$ — число частей, порождаемых n точками на прямой.

Как получить эту формулу?

1. Пусть на прямой имеется n точек (дано) (рис. 3.30).

Рис. 3.30

2. Пронумеруем точки слева направо в том порядке, в каком они появляются на прямой (рис. 3.30). Сосчитаем части прямой.

3. Имеется часть слева от точки 1. Обозначим эту часть *1*.

4. Между точками *1* и *2* находится часть *2*.

При последовательном прохождении каждой точки считается следующая часть.

5. Таким образом, между точками $n - 1$ и n находится часть n, а справа от точки n — часть $n + 1$.

6. Всего имеем $n + 1$ часть.

3.2. ИЗМЕРЕНИЕ ДЛИН ОТРЕЗКОВ

3.28. $CA + AD = CD$.

3.29. Правая веха длиннее левой.

3.30. Точка B лежит между точками A и C.

3.31. Точка A, B и C не лежат на одной прямой.

3.32. *Решение:*

1. Если выполняется равенство $AB + BC = AC$, то это означает, что то точка B лежит между точками A и C.

2. Если выполняется равенство $AC + CB = AB$, то точка C лежит между точками A и B.

3. По свойству измеренных длин отрезков из трех точек на прямой только одна лежит между двумя другими. Поэтому равенства $AB + BC = AC$ и $AC + CB = AB$ одновременно выполняться не могут.

3.33. Согласно сформулированному нами признаку взаимного расположения точек на прямой, если выполняется равенство $BA + AC = BC$, то точка A лежит между точками B и C.

3.34. Точка A лежит между точками B и C.

3.35. Нет нельзя.

3.37. Когда столяр распиливает доску, пусть даже очень тщательно, все равно будет образовываться стружка. Поэтому общая длина получившихся двух половин меньше длины доски.

3.38. $MN = 5$.

3.39. 120 мм.

3.40. 0,9 см.

3.41. 5,4 дм; 0,54 м.

3.42. 540 см; 5,4 м.

3.44. $BC = 3$.

3.46. Если точка P лежит между точками C и M, то $CP + PM = CM$.

3.47. $10x$ см.

3.48. Эту задачу можно решить алгебраическим методом — одной из основных форм аналитической деятельности.

Как мы отмечали ранее, при решении геометрических задач алгебраическим методом, необходимо выполнить следующие действия: изучить условие задачи, выбрать основную неизвестную величину и ввести ее обозначение, выразить другие неизвестные через выбранную неизвестную и данные в условии задачи величины, составить уравнение (или систему уравнений) и решить его (ее).

1. Пусть расстояние AB, измеренное в дециметрах, равно x *(дм)*.

2. Тогда пятикратное расстояние AB, измеренное в дециметрах, равно $5 \cdot x$ *(дм)* (свойство умножения величины на число).

3. Выразим расстояние AB в сантиметрах: $AB = 10 \cdot x$ *(см)*.

4. В условии задачи сказано, что расстояние AB, измеренное в сантиметрах, на 15 больше, чем пятикратное то же самое расстояние, измеренное в дециметрах. Поэтому верно равенство: $10 \cdot x - 15 = 5 \cdot x$; $5x = 15$; $x = 3$ *(дм)*.

Ответ: расстояние $AB = 3$ (дм).

3.49. а) $AC = 18$ см; б) $AC = 18$ м; в) $AC = 18$ км.

3.50. а) $AC = 612$ см $= 6{,}12$ м; б) $AC = 1206$ см $= 12{,}06$ м; в) $AC = 600\,012$ см $= 6{,}00012$ км.

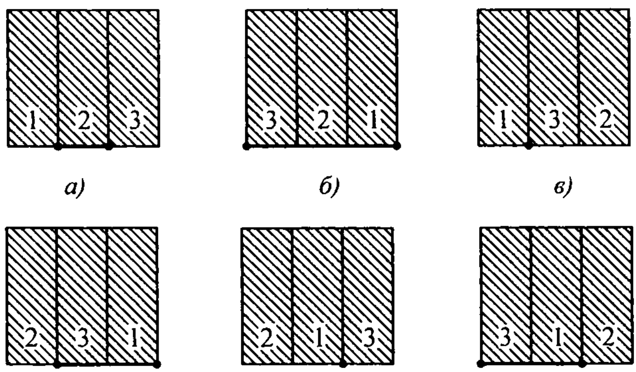
Здесь складываются величины, выраженные в разных единицах — метрах, сантиметрах, километрах, т.е. разнородные. Поэтому, прежде, чем проводить сложение, требуется привести величины к одному и тому же роду, не важно к какому.

3.51. В ответах задачи 3.49 и 3.50 во всех трех случаях получено одно и то же число, так как складываются однородные величины.

3.52. За единицу длины можно взять любой отрезок. Установление одной универсальной единицы длины дало бы однородность всех величин, но, с другой стороны, достаточно большие или достаточно малые расстояния имели бы громоздкую запись.

3.53. 1 м = 100 см. Следовательно, всего кубиков со стороной 1 см будет равно $100 \cdot 100 \cdot 100 = 1\,000\,000$. Длина ряда 1 000 000 см = 10 000 м = 10 км.

3.54. *Решение:* В условии этой задачи не сказано, в каком порядке стоят тома на полке, поэтому нам надо рассмотреть все возможные случаи их расположения, и в каждом из них посчитать длину получившегося отрезка (пути книжного червяка). Таких случаев может быть шесть (*рис. 3.31, а–е*).



а) *б)* *в)*

г) *д)* *е)*

Рис. 3.31

В случае *а)* червь проделал путь, равный толщине одного тома, то есть, *3,5 см.*

В случае *б)* его путь равен толщине трех томов: 3,5·3, он равен *10,5 см.*

В случаях *в)* и *д)* путь составляет *0 см*, так как первая страница первого тома прилегает к последней странице третьего тома.

В случаях *г)* и *е)* червь прополз путь, равный толщине двух томов, то есть: $3,5 \cdot 2 = 7$ *см*.

Обобщая результаты рассмотренных шести случаев, получим, что книжный червяк мог проползти *0 см. 3,5 см, 7 см, 10,5 см.*

3.55. *Решение:* Эту задачу можно решить алгебраическим методом.

1. Длина отрезка MN равна *12*, длина отрезка MP на 2 больше, чем длина отрезка PN (дано).
2. Найти длины отрезков MP и PN.
3. Пусть длина отрезка PN равна x.
4. Тогда длина отрезка MP равна $x + 2$ (1, 3).
5. $MN = MP + PN$.
6. $12 = x + (x + 2)$; $2x = 10$; $x = 5$ (3, 5)
7. Получили, что $PN = 5$, тогда $MP = 5 + 2 = 7$ (1, 6).

Ответ: $MP = 7$ и $PN = 2$.

3.56. Ребро AC должно быть меньше 7 см (воспользовались неравенством треугольника).

3.59. Точка M лежит между точками P и K.

3.60. *Решение.* 1) $DK + KH = DH$; $DH + HK = DK$. Оба равенства выполняться не могут.

2) $KH + HD = KD$; $DH + HK = DK$. Оба равенства одновременно выполняются.

3) $HK + DK = HK$; $DK + KH = DH$. Оба равенства одновременно не выполняются.

4) $HK + KD = HD$; $KD + DH = KH$. Оба равенства одновременно выполняться не могут.

5) $KD + DH = KH$; $HD + DK = HK$. Оба равенства выполняться могут.

3.61. *Решение.*

$$\left.\begin{array}{l}\text{1. Города } X, Y, Z \text{ расположены на одной прямой.}\\ \text{2. } XY = 12 \text{ км, } YZ = 21 \text{ км}\end{array}\right\} \begin{array}{l}\text{(дано)}\\ \text{(рис. 3.32)}\end{array}$$

3. В каждом отрезке расположены города. Вся сложность решения этой задачи связана с построением второго чертежа, вернее с анализированием возможных случаев расположения данных точек.

4. Построим рисунок, который может иметь два — рис. 3.32, *а*, *б*.

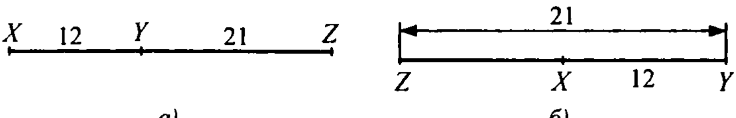


Рис. 3.32

5. Можно ответить на вопрос 1.:

Однозначно сказать по таким данным, какая точка лежит между двумя другими невозможно.

6. Ответим на вопрос 2: в первом случае $XY = 12$; во втором — 12.

7. Стало известно, что $XZ = 9$ км. В этом случае город X лежит между городами Z и Y (рис. 3.32, *б*).

8. Известно, что $XY = k$ м, $XZ = n$ км, $YZ = k + n$ км. Ответ как в п. 7.

3.3. РАВЕНСТВО ОТРЕЗКОВ

3.62. Можно отложить два отрезка в разных направлениях.

3.63. Эта задача очень полезна. Она отрабатывает тот факт, что длина — это величина и использует прием мыслительной деятельности «сравнение».

3.64. Отрезок AB длиннее отрезка KL, а отрезки CD и AB равны между собой. Отсюда следует, что отрезок KL короче отрезка CD?

3.65. Ответ: всего у куба 12 равных между собой ребер.

3.66. Ответ: у прямоугольного параллелепипеда есть равные ребра. На рис. 3.33, мы изобразили прямоугольный параллелепипед. У него равны ребра:

$AA_1 = BB_1 = CC_1 = DD_1$;

$AB = A_1B_1 = CD = C_1D_1$;

$AD = A_1D_1 = BC = B_1C_1$.

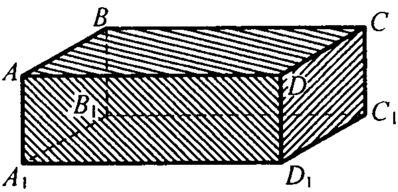


Рис. 3.34

3.67. *Решение.*

1. На рис. 3.34 изображаем 10 точек — оснований столбов.

2. Мы видим, что на рисунке 3.34 изображено 9 равных отрезков.

3. По свойству измерения длин отрезков имеем

$AB = 9 \cdot 2 = 18$ м.

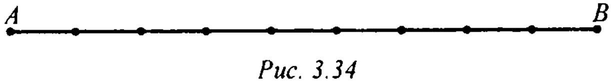


Рис. 3.34

3.68. Ответ: 20 м.

3.69. Ответ. 1998 рельсов.

3.70. *Решение.* 1. Чтобы подняться на четвертый этаж, надо пройти 3 этажа.

2. Чтобы подняться на шестнадцатый этаж, надо пройти 15 этажей.

3. В 5 раз надо пройти Пете больше, чем Коле.

3.71. *Решение.* 1. Поскольку Пете необходимо пройти в 4 раза больше ступенек, значит, ему нужно пройти: 4·3= 12 этажей.

2. Первые три этажа мы учли дважды, значит, 12 этажей – – 3 этажа = 9 этажей.

3. Петя живет на девятом этаже.

3.72. Чтобы Коля поднялся на свой этаж, ему необходимо сначала пройти 20 ступенек до второго этажа, мы считаем это как отрезок длиной 20. Чтобы подняться на свой этаж, ему нужно пройти еще 3 таких пролета ступенек: 3·20 = 60 ступенек.

Рис. 3.35

2. Всего ему нужно пройти 20 + 60 = 80 ступенек (рис. 3.35).

3. Коле необходимо пройти в 4 раза больше, чем Пете.

3.74. *Решение.* Для решения данной задачи учащиеся должны знать свойства измерения длин отрезков и определение равенства отрезков.

1. *A, B, C* и *D* — точки прямой *l*, $AC = BD$ (дано) (рис. 3.12)

2. Докажите, что $AB = CD$.

3. $AC = AB + BC$ (I, свойство измерения длин отрезков)

4. $BD = BC + CD$ (I, свойство измерения длин отрезков)

5. $AB + BC = BC + CD$ (I, свойство измерения длин отрезков)

6. Из п. 5 следует, что $AB = CD$.

3.75. *1)* Сделаем чертеж, иллюстрирующий путь кузнечика (рис. 3.36).

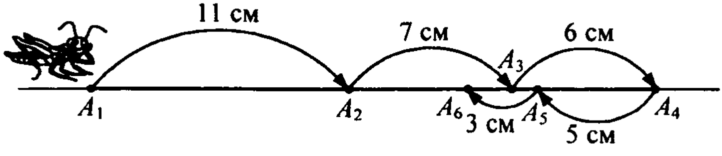


Рис. 3.36

Теперь нам видно, длину какого отрезка необходимо найти, чтобы ответить на вопрос задачи. Это отрезок A_1A_6. Найдем длину этого отрезка:

$A_1A_6 = A_1A_2 + A_2A_3 + A_3A_4 - A_4A_5 - A_5A_6 =$
$= 11 + 7 + 6 - 5 - 3 = 16$ (см).

2) В этом задании мы не можем сразу представить себе перемещение кузнечика, так как нам не известно, в каком направлении он прыгал.

Так как по условию задачи он сделал пять прыжков, известна длина каждого из них и то, что кузнечик оказался в исходной точке, то мы можем сделать следующую запись: 11... 7... 6... 5... 3 = 0.

Теперь нашей задачей является проставить знаки «+» или «–» вместо точек так, чтобы получилось верное равенство: $11 - 7 - 6 + 5 - 3 = 0$.

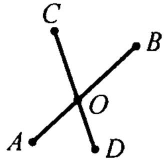
Итак, чтобы кузнечик оказался в исходной точке, он должен сделать один прыжок вперед на 11 см, затем два прыжка назад на 7 и 6 см, потом снова прыжок вперед на 5 см и, наконец, прыжок назад на 3 см.

Ответ: 1) 16 см; 2) 1 прыжок вперед, 2 назад, 1 вперед и 1 назад.

3.4. ВЗАИМНОЕ РАСПОЛОЖЕНИЕ ОТРЕЗКОВ

3.76. Отрезки, имеющие одну общую внутреннюю точку называются пересекающимися (рис. 3.37, *а*), но отрезки могут иметь и один общий конец (рис. 3.37, *б*).

Их также можно назвать пересекающимися.



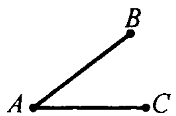


Рис. 3.37

3.78. Нужно утверждать, что отрезки не имеют общих точек.

3.79. *Решение.* При решении этой задачи, мы можем опираться на случаи взаимного расположения прямых в пространстве.

1. В каждой вершине куба пересекается три отрезка.

2. Каждому отрезку, являющемуся ребром куба параллельны три отрезка, являющиеся ребрами куба.

3. Среди отрезков, являющихся ребрами куба, есть попарно скрещивающиеся.

3.80. Диагонали куба и диагонали его граней могут быть параллельными отрезками, например, A_1B и D_1C, A_1D и B_1C, могут быть пересекающимися отрезками, например, A_1C и BD_1, могут быть скрещивающимися, например, A_1D и BD_1,AC и B_1D_1. 7 отрезков.

3.81. *Решение.* 1. В каждой вершине треугольной пирамиды пересекается 3 отрезка, являющихся ее ребрами. 2. Параллельных отрезков, являющихся ребрами треугольной пирамиды, нет. 3. Есть скрещивающиеся отрезки, например, AB и CD, AC и BD, BC и AD.

3.82. Приведем некоторые случаи возможного расположения трех отрезков на рис. 3.38.

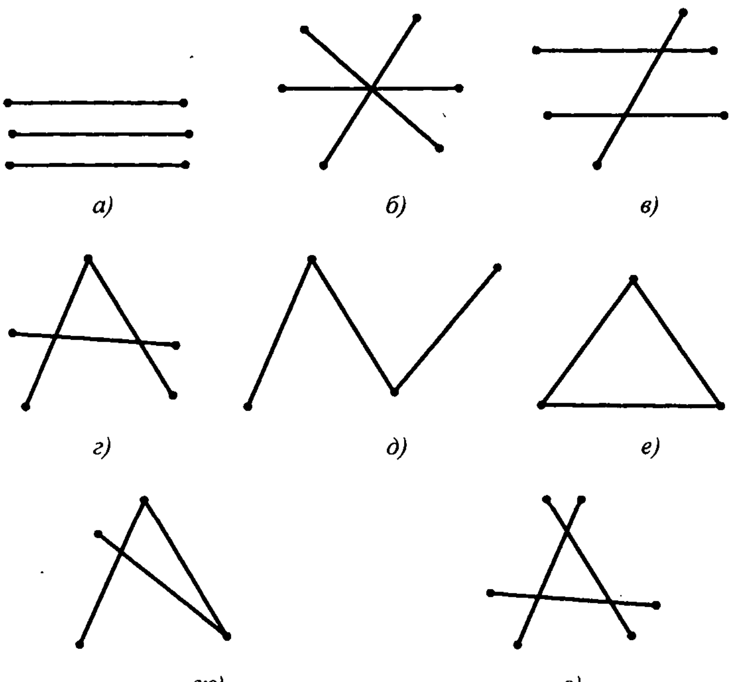


Рис. 3.38

3.83. Приведем некоторые случаи взаимного расположения четырех отрезков на рис. 3.39.

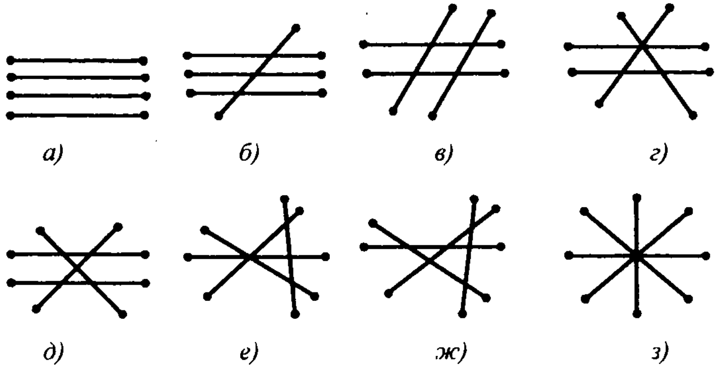


Рис. 3.39

3.84. *Решение:* Возможны два случая: 1) данные отрезки принадлежат одной прямой; 2) данные отрезки принадлежат различным прямым:

В случае 1) возможны следующие варианты взаимного расположения двух отрезков: а) Отрезки *AB* и *CD* не имеют общих точек *(*рис. *3.40, а);* б) Отрезки *AB* и *CD* имеют единственную общую точку (точка *B* совпадает с точкой *C*) *(*рис. *3.40, б);* в) Отрезки *AB* и *CD* имеют бесконечное множество общих точек (общую часть — новый отрезок *CB) (*рис. *3.40, в),* либо один из отрезков лежит «внутри» другого *(*рис. *3.40, г).*

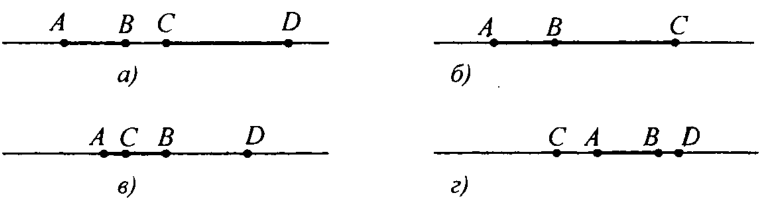


Рис. 3.40

В случае 2) также возможны варианты: а) данные отрезки принадлежат пересекающимся прямым, в этом случае у отрезков единственная общая точка *(*рис. *3.41, а–в);* б) общих точек нет *(*рис. *3.41, г)*; в) в случае, изображенном на рис. 3.41, *д* данные отрезки принадлежат параллельным прямым, поэтому они не имеют общих точек.

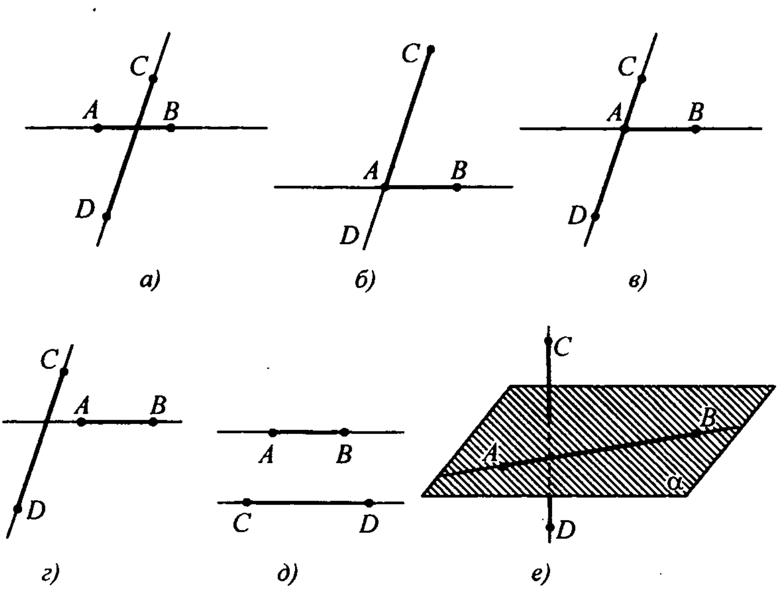


Рис. 3.41

Обобщая рассмотренные случаи, приходим к выводу, что два отрезка могут либо не иметь общих точек, либо иметь единственную общую точку, либо иметь бесконечное множество общих точек.

Формулировка и решение этой задачи является типичным примером «закрытой задачи», которая решается в планиметрии, а ее рассмотрение в пространстве не предусмотрено. Можно изучить ситуацию, описанную в задаче и на плоскости, и в пространстве, то есть тот случай, когда два данных отрезка не лежат в одной плоскости. Ясно, что в этом случае отрезки AB и CD принадлежат скрещивающимся прямым и не имеют общих точек (рис. 3.41, *е*).

3.85. На рис. 3.42 показано, что шесть отрезков так расположить можно. На плоскости 6 отрезков так расположить можно, а 7 нельзя. Докажем это.

1. Предположим; что такое расположение 7 отрезков возможно.

2. Занумеруем отрезки и составим такую таблицу 7 х 7: в клетке (i, j) на пересечении i-й строки и j-го столбца поставим «+», если i-й отрезок пересекается с j-м, и «–», если не пересекается. Если $i = j$, то тоже ставим «–». Подсчитаем двумя способами, сколько плюсов в таблице.

4. С одной стороны, в каждой строке их 3, поэтому всего — $3 \cdot 7 = 21$. С другой стороны, таблица заполнена симметрично относительно диагонали: если в клетке (i, j) стоит «+», то в клетке (j, i), тоже. Значит, общее количество плюсов должно быть четным.

6. Получили противоречие, а значит, наше предположение не верно.

а) *б)*

Рис. 3.42

3.5. РАССТОЯНИЕ МЕЖДУ ТОЧКАМИ НА ПЛОСКОСТИ

3.86. При решении этой задачи следует использовать приведенные выше теоремы:

$AC \le AB + BC = 12$ см и $AC \ge AB - BC = 4$ см.

Мы получаем, что $AC \ne 20$ см, $AC \ne 3$ см, $AC \ne 4{,}5$; $AC \ne 6$.

3.87. *Решение.* Случай а) невозможен, так как, с одной стороны, $XZ = XY + YZ$, т. е. точка Y лежит между точками X и Z, а с другой, $XZ > XY + YZ$, т. е. точка Y не лежит между точками X и Z.

Случай б): $XZ = XY + YZ$, $XZ \le XY + YZ$. В данном случае все три точки X, Y, Z лежат на одной прямой.

Случай в). Построение невозможно.

3.88. Ответ: $1 \text{ см} \le AX \le 5 \text{ см}$.

2) Существуют две такие точки.

Доказать существование точек A, B и C в других случаях без теоремы о взаимном расположении двух окружностей пока нельзя. Для того чтобы наглядно убедиться в существовании таких точек, надо их построить; отметить точки A и B ($AB = 8$ см); построить и найти точки пересечения (A, AC) при данном значении AC. Можно заметить, что эти окружности имеют общие точки, если $4 \text{ см} \le AC \le 12 \text{ см}$.

3.89. Ответ. Всегда верны равенства и неравенства в случаях а), б), д). В случаях г), е), з) неравенства не верны. В других случаях равенства и неравенства могут быть и верны и не верны.

При решении этой задачи важно обосновать ответ, сославшись на соответствующие свойства расстояний. Каждый из случаев возможного расположения точек X, Y, Z следует показывать на рисунках.

3.90. Ответ: школу надо построить в деревне A.

3.91. *Решение.* Самое интересное в задаче то, что для ответа не нужно знать скорость машины.

1. Пусть x — число деревьев, промелькнувших в течение одной минуты.

2. За час машина проедет мимо $60x$ деревьев.

3. Скорость машины, как известно из условия задачи, равна $10x$ км/ч.

4. Проезжая расстояние в $10x$ км, машина проедет мимо $60x$ деревьев, следовательно, на расстоянии 1 км она проедет мимо $60x/10x$, или 6 деревьев.

5. Это и означает, что расстояние между деревьями равно 1/6.

3.92. *Решение.* 1. Примем за единицу длины ширину (или равную ей глубину) строя курсантов, а за единицу времени — то время, которое требуется им, чтобы пройти единицу длины. В принятых единицах скорость передвижения строя также будет единичной.

2. Пусть x — полное расстояние, пройденное терьером (его скорость будет выражаться той же величиной x).

3. Когда пес бежит к первой шеренге, его скорость относительно курсантов равна $x - 1$.

4. При возвращении в последнюю шеренгу скорость терьера составит $x + 1$.

5. Каждый раз он пробегает (относительно строя) расстояние 1 и на путешествие в оба конца затрачивает единицу времени.

6. Это позволит нам составить уравнение

$$\frac{1}{x-1}+\frac{1}{x+1}=1,$$

которое можно переписать в виде квадратного уравнения

$$x^2 - 2x - 1 = 0.$$

7. Положительный корень этого уравнения равен $1+\sqrt{2}$. Умножив его на 15, получим окончательный ответ: ≈36,15 м. Иначе говоря, терьер пробегает расстояние, равное длине стороны квадрата, в форме которого выстроены курсанты, плюс расстояние, равное длине диагонали того же квадрата.

Полное решение этой задачи невозможно в 5–6 классах, например, потому, что там нет квадратных уравнений, но показать такие уравнения можно.

Развитие задачи. Решив эту задачу, вы можете испытать свои силы в решении более сложного ее варианта. В этом варианте задачи щенок бегает не вперед и назад через строй марширующих курсантов, а с постоянной скоростью бегает по периметру квадрата, держась все время как можно ближе к своей роте. Как и в предыдущем случае, к моменту его возвращения в точку A курсанты успевают пройти 15 м. Какое расстояние пробегает пес?

Решение. 1. Пусть, как и прежде, ширина строя равна единице и единице равно время, за которое курсанты проходят 15 м. Тогда и скорость их также равна 1.

2. Пусть x — расстояние, пройденное собакой (и скорость собаки). Скорость собаки относительно строя равна $x-1$, когда собака бежит от последней шеренги к первой, $\sqrt{x^2-1}$, когда собака бежит поперек строя, и $x+1$, когда собака возвращается в последнюю шеренгу.

3. Так как собака обегает строй за единицу времени, можно составить уравнение

$$\frac{1}{x-1}+\frac{2}{\sqrt{x^2-1}}+\frac{1}{x+1}=1,$$

которое переписывается в виде уравнения четвертой степени

$$x^4-4x^3-2x^2+4x+5=0.$$

4. Только один положительный корень $x = 4{,}18112$ не является посторонним. Умножив его на 15, получим ответ: 62,7168... (м).

Исходную формулу полученного выше уравнения можно привести к виду:

$$\frac{1}{\sqrt{x-1}}+\frac{1}{\sqrt{x+1}}=1,$$

очень похожему на уравнение, возникающее в первом варианте задачи. Чтобы выполнить преобразование, нужно лишь извлечь квадратные корни из правой и левой частей исходного уравнения.

Возможны многочисленные варианты этой задачи: для строя, марширующего в направлении, параллельном диагонали квадрата; для строев, имеющих форму правильных многоугольников с числом сторон, превышающим 4; для строя, марширующего по кругу и т.п.

3.93. *Решение.* 1. Пусть O — точка пересечения данных прямых a и b (считаем, что точки P и Q движутся по данным прямым в направлении к точке O с постоянной скоростью v (дано) (рис. 3.43, *а*).

2. P_0 и Q_0 — положения точек в тот момент времени t_0, когда они находятся на одинаковом расстоянии от точки O (t_0 находится ровно посередине между моментами времени, когда одна и другая точки проходят через точку O); A — точка пересечения перпендикуляров к данным прямым, проведенных соответственно в точках P_0 и Q_0 (рис. 3.43, *б*).

3. Докажем, что точка A — та самая неподвижная точка, существование которой утверждается в условии.

4. Частный случай, когда точки P_0, Q_0 и A совпадают с точкой O, очевиден.

5. В общем случае (рис. 3.43, *б*) ясно, что треугольники AP_0O и AQ_0O равны, потому $AP_0 = AQ_0$ (1, 2, свойства равных треугольников).

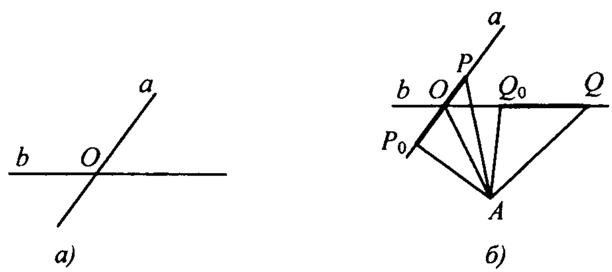


Рис. 3.43

6. Пусть P и Q — положения точек в произвольный момент времени t (отличный от t_0).

7. Тогда $PP_0 = QQ_0$ (точки движутся с одинаковой скоростью), треугольники PP_0A и QQ_0A равны, следовательно, $AP = AQ$ (6, свойства равных треугольников).

Из нашего решения видно, что на самом деле верно более сильное утверждение, чем равенство расстояний от точки A до соответствующих друг другу точек P и Q: если повернуть одну из данных прямых вокруг точки A (на $\angle P_0AQ_0$) так, чтобы она совпала с другой, то в любой момент времени точка P совпадает с соответствующей точкой Q.

3.94. *Решение.* 1. Рассмотрим прямоугольную систему координат и будем на осях Ox и Oy откладывать соответственно пути, пройденные первой и второй машинами в данный момент времени.

2. Так, OX — путь, пройденный первой машиной от пункта A, а OB_1 — длина первой дороги. Аналогичный смысл имеют величины OY и OB_2.

3. Пусть в некоторый момент времени положение машины на первой дороге l_1 изображается точкой X оси Ox, а положение машины на второй дороге l_2 — точкой Y оси Oy (OX — путь, пройденный точкой, считая от A, OB_1 — длина первой дороги.

Аналогичный смысл имеют OY и OB_2).

4. Положение этих двух машин (одной на l_1, другой на l_2) изобразится точкой Z прямоугольника OB_1CB_2 (рис. 3.44).

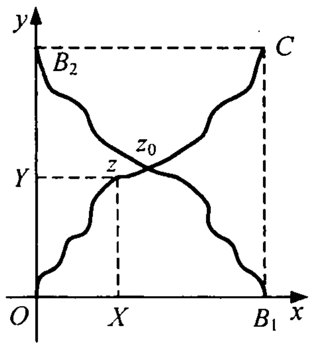


Рис. 3.44

Все точки Z, изображающие положения машин M_1 и M_2 в каждый момент t движения, образуют некоторую непрерывную кривую, которая проходит через точки O и C.

5. Вопреки условию задачи предположим, что каким-то образом можно осуществить указанное передвижение платформ.

6. Тогда аналогично получим еще одну кривую, соединяющую B_2 и B_1.

7. Непрерывные кривые OC и B_1B_2, соединяющие противоположные вершины прямоугольника OB_1CB_2, обязательно должны пересечься в некоторой точке z_0 (это непосредственное следствие непрерывности наших кривых).

8. Точке Z отвечают такие точки на дорогах l_1 и l_2, что расстояние между этими точками не превосходит 20 м (ибо эта точка принадлежит линии OC, изображающей траекторию движения машин).

9. Но это значит, что еще до того, как платформы (движение которых изображается линией B_1B_2) достигнут положения, изображаемого точкой Z_0, они неминуемо столкнутся (ибо расстояние между центрами платформ должно превышать 22 м).

Замечание. Расстояние между точками A и B есть длина отрезка AB. Это так практически во всех учебниках по геометрии.

Но расстояние, например, может измеряться по кривой соединяющей точки A и B (рис. 3.45). Однако в этом случае, говоря о расстоянии, неясно, о какой величине идет речь (рис. 3.46): или это l_1, или l_2. Во всех задачах мы, говоря о расстоянии от точки A до точки B, имеем в виду длину отрезка AB.

3.95. *Решение.* 1. Разобьем наш участок на 50 полос — n_1, n_2, ..., n_{50} ширины 2 (рис. 3.47) и рассмотрим какую-либо одну из этих полос, например, полосу n_1 (рис. 3.47).

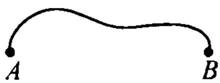


Рис. 3.45

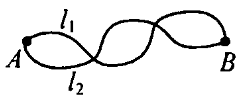


Рис. 3.46

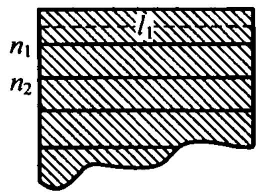


Рис. 3.47

2. Если центр дерева расположен вне полосы n_1 (в этом случае мы будем говорить, что «дерево растет вне полосы»), то дерево не задевает центральной линии l_1 полосы.

3. Так как внутри участка нельзя проложить тропинки длиной 10, не задевающие ни одного дерева, то вдоль линии l_1 нельзя указать свободного от дерева отрезка длиной 10, что было бы невозможно, если бы эта линия была разбита деревьями меньше чем на 9 частей: ведь даже восемь отрезков длиной 10 + семь отрезков длиной 2 (последнее слагаемое указывает максимум длины участков линии l_1, проходящих внутри 7 деревьев, разбивающих l_1 на 8 частей) не составят в сумме длину 100-й линии l_1.

4. Внутри полосы n_1 растут максимум 8 деревьев (разбивающих линию l_1 на 9 частей).

5. Аналогично этому внутри каждой из полос n_2, n_3, ... также растет не меньше 8 деревьев.

6. Общее число деревьев на участке не может быть меньше, чем $50 \cdot 8 = 400$.

3.96. *Решение.* 1. Пусть M_1 и M_2 — две произвольные диаметрально противоположные точки окружности S радиуса 1.

2. $M_1M_2 = 2$ и, следовательно,

$$M_1A_1 + M_2A_2 \geq M_1M_2 = 2 .$$

3. $M_1A_2 + M_2A_2 \geq 2$, ..., $M_1A_{1000} + M_2A_{1000} \geq 2$ (1, свойство расстояний).

$M_1A_1 + M_2A_1 = 2$, если точка A_1, принадлежит отрезку M_1M_2 и $M_1A_1 + M_2A_1 > 2$ (во всех других случаях).

4. $(M_1A_1 + M_2A_1) + (M_1A_2 + M_2A_2) + ... + (M_1A_{1000} + M_1A_{1000}) =$
$= (M_1A_1 + M_1A_2 + ... + M_1A_{1000} + M_2A_1 + M_2A_2 + ... + M_2A_{1000}) \geq$
≥ 2000, и, значит, хоть одна из двух точек M_1 и M_2 наверняка удовлетворяет условию задачи: сумма расстояний от нее до точек $A_1, A_2, \dots, A_{1000}$ не меньше 1000.

3.97. *Решение.* 1. Пусть A — какая-то одна (безразлично какая!) из данных точек. Если все точки находятся от A на расстоянии меньше 1, то их все можно покрыть кругом радиуса 1 (с центром A).

2. Предположим, что существует среди наших точек такая точка B, что $AB \geq 1$.

3. Для каждой третьей точки M из нашей системы точек по условию задачи либо $AM < 1$, либо $BM < 1$.

4. Все оставшиеся 23 точки можно разбить на два класса: такие точки C, что $AC < 1$, и такие точки D, что $AD \geq 1$, но $BD < 1$.

5. Если мы имеем 12 (или больше) точек C, то круг радиуса 1 с центром A покрывает 13 (или больше) точек.

6. Если число точек C меньше 12, то мы имеем 12 (или больше) точек D и круг с центром B и радиусом 1 покрывает 13 (или больше) точек.

3.98. *Решение.* 1. Пусть $ABCD$ — произвольный выпуклый четырехугольник, M — точка пересечения его диагоналей, X — какая угодно другая точка плоскости (рис. 3.48).

2. Ясно, что $XA + XC \geq AC = MA + MC$ и
$XB + XD \geq BD = MB + MD$.

3. $XA + XB + XC + XD \geq MA + MB + MC + MD$, где равенство имеет место лишь в том случае, когда точка X совпадает с точкой M.

4. Искомой точкой является точка M пересечения диагоналей четырехугольника.

3.99. *Решение.* Идея доказательства: надо три вершины A, B, C четырехугольника поместить очень близко друг от друга, а четвертую вершину D и точку O — далеко от A, B и C и близко друг от друга.

1. Пусть расстояние от точек A, B, C до D и O, равно l:

2. $AB \approx 0$, $BC \approx 0$, $CD \approx l$, $DA \approx l$, $OA \approx l$, $OB \approx l$,
$OC \approx l$, $OD \approx 0$, $AB + BC + CD + DA \approx 2l$,
$OA + OB + OC + OD \approx 3l$, а $2l < 3l$ (1, свойство расстояний)

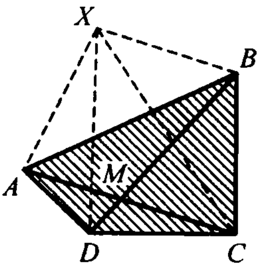


Рис. 3.48

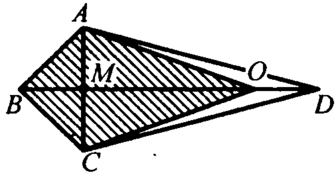


Рис. 3.49

То что здесь написано, только наметка решения. Точное решение этой задачи может быть, например, таким:

1. Построим четырехугольник $ABCD$ и точку O внутри него, как показано на рис. 3.49, где $BD \perp AC$, $AM = BM = CM = OD = 1$, $OM = 100$, $DM = 101$.

2. Можно проверить, что

$$AB + BC + CD + DA = 2\sqrt{2} + 2DC < 2\sqrt{2} + 2 \cdot 102 < 207,$$

в то время как

$$OA + OB + OC + OD = 102 + 2OC > 102 + 2 \cdot 100 = 302.$$

Ответ: может.

3.100. *Решение.* 1. Рассмотрим всевозможные расстояния между заданными N точками и выберем среди этих расстояний наибольшее — пусть это расстояние между какими-то двумя точками A и B (рис. 3.50, *а*).

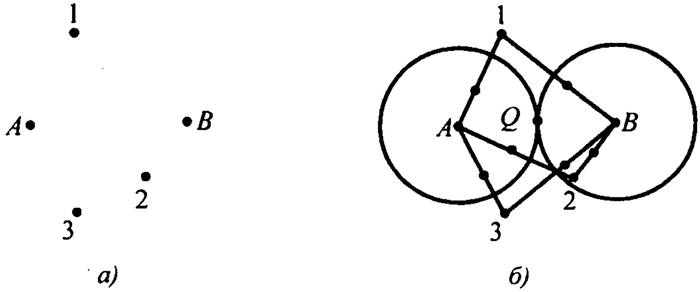


Рис. 3.50

2. Соединим точку A с остальными $N - 1$ точками: получим $N - 1$ отрезков (на рис. 3.50, *б* это отрезки $A1$, $A2$, $A3$).

3. Середины этих отрезков различны и все лежат внутри или на границе круга с центром в точке A радиуса $\frac{1}{2}AB$ (рис. 3.50, *б*).

4. Аналогично, соединив точку B с остальными $N-1$ точками, получим $N-1$ отмеченных точек (середин), расположенных внутри или на границе круга того же радиуса с центров в точке B.

5. Построенные два круга имеют только одну общую точку Q — середину отрезка AB.

6. Всегда имеется по крайней мере $2(N-1)-1$ (так как середину отрезка AB мы учитываем дважды) отмеченных середин, т. е. не менее $(2N-3)$ отмеченных точек.

7. Покажем, что $(2N-3)$ — это наименьшее число отмеченных точек.

8. Пусть заданные N точек лежат на одной прямой, причем расстояния между соседними точками одинаковы.

9. В этом случае число отмеченных точек-середин равно $(N-2)+(N-1)=2N-3$.

После решения этой задачи мы предлагаем читателям подумать над следующей задачей: при каких N можно расположить на плоскости N точек так, чтобы они не лежали на одной прямой и чтобы при этом количество отмеченных середин отрезков с концами в этих точках равнялось $2N-3$?

3.6. РАССТОЯНИЕ МЕЖДУ ФИГУРАМИ

3.101. Надо найти расстояние между самыми близкими друг к другу точками этих зданий.

3.102. Расстояние между планетами находится на линии центров этих планет.

3.103. Обозначим: *С* — Солнце, *Л* — Луна, *З* — Земля.

а) При солнечном затмении (рис. 3.51, *а*)

СЛ = *СЗ* – *ЛЗ* = 150 млн км – 400 тыс. км = 149 600 тыс. км.

б) При лунном затмении (рис. 3.51, *б*):

СЛ = *СЗ* + *ЗЛ* = 150 млн км + 400 тыс. км = 150 400 тыс. км.

Рис. 3.51

3.104. а) Отрезок DA; б) отрезок DT; в) перпендикуляр, опущенный из точки D на отрезок KT; г) отрезок DA; д) отрезок DC; е) перпендикуляр, опущенный из D на отрезок AC_1, ж) перпендикуляр, опущенный из D на прямую A_1, C_1.

Глава 4
ЛОМАНАЯ

4.1. ПОНЯТИЕ ЛОМАНОЙ

4.1. 1) На рис. 4.1, *а* ломаная имеет 6 вершин и 5 звеньев; на рис. 4.1, *б* — 6 вершин и 5 звеньев; 2) на рис. 4.1, *а* изображена простая ломаная; 3) звенья A_2A_3 и A_4A_5 ломаной, изображенной на рис. 4.1, *б* не соседние по порядку, имеют общую точку.

4.2. Примеры ломаных из окружающей обстановки: схема линий метрополитена, схема движения электричек, выкройка детали одежды, маршрут движения автотранспорта, радиоэлектронная схема, план здания, структура кристалла и т.д. (во многих этих случаях рассматриваются и многоугольники как замкнутые ломаные).

4.3. Простые ломаные изображены на рис. 4.2, *а–г, е, з*.

4.4. На рис. 4.2, *а* — замкнутая простая ломаная.

4.5. Три звена.

4.6. Замкнутая ломаная на рис. 4.3 состоит из четырех звеньев. Из рисунка неясно, лежат ли все ее звенья в одной плоскости. Если данное изображение соответствует плоскому четырехугольнику, то все звенья ломаной лежат в одной плоскости. Если все звенья ломаной являются ребрами пирамиды, то вся ломаная не будет принадлежать одной плоскости (рис. 4.17).

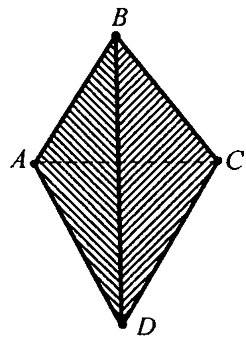


Рис. 4.17

4.7. 1. Ломаные, состоящие из ребер куба: ABC, $AA_1D_1C_1$, $A_1D_1C_1C$ и т.д.

2. Любая двухзвенная ломаная, а также ломаная, все звенья которой образуют некий многоугольник или часть его, будут расположены в одной плоскости.

Ломаная, состоящая из более чем двух звеньев, не принадлежащих одной грани, может служить примером ломаной, все звенья которой не лежат в одной плоскости. Таких ломаных можно назвать довольно много, например, $AA_1D_1C_1$.

4.8. Простая ломаная изображена на рис. 4.5, *а*, простая замкнутая ломаная — на рис. 4.5, *в*.

4.9. В этой задаче не просят построить все ломаные или использовать все точки. В связи с этим решением данной задачи являются всякие верные попытки построить нужные ломаные.

1. Для точек, изображенных на рис. 4.6, *а*, можно построить ломаную $ACDB$ — рис. 4.18, *а*.

2. Для точек, изображенных на рис. 4.6, *б*, можно построить ломаные, изображенные на рис. 4.18, *б*, *в*.

3. Для точек, изображенных на рис. 4.6, *в*, можно построить ломаные — рис. 4.18, *г*, *д*.

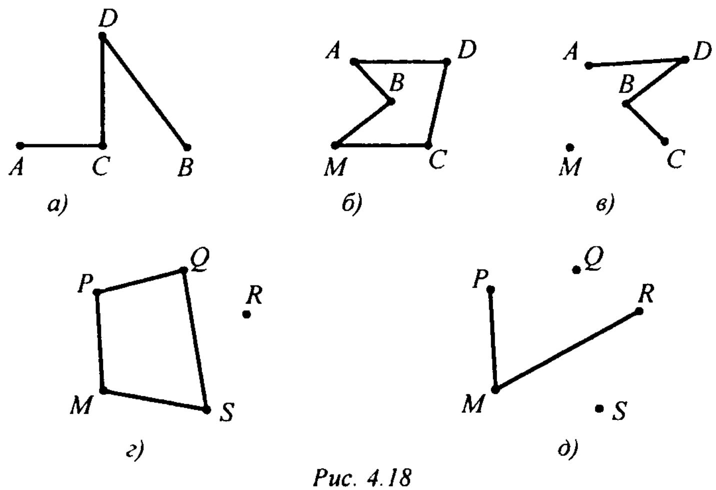


Рис. 4.18

4.10. Чтобы прямая KH рассекала некоторый отрезок на два отрезка, нужно концы искомого отрезка расположить в разных полуплоскостях относительно данной прямой.

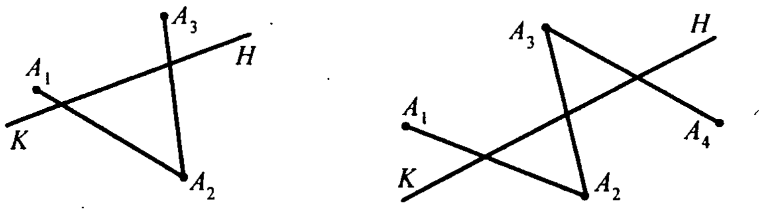
Решение. Рассмотрим случай самой короткой ломаной, состоящей из двух звеньев.

1. Пусть A_1, A_2, A_3 — вершины этой ломаной. Чтобы построить первое звено A_1A_2 ломаной $A_1A_2A_3$, нужно расположить точки A_1 и A_2 в разных полуплоскостях относительно прямой KH.

2. Взяв вершину A_3 в полуплоскости, отличной от той, в которой находится вершина A_2 относительно прямой KH, мы получим второе звено A_2A_3 ломаной $A_1A_2A_3$, которое также пересекается с прямой KH (рис. 4.19, *а*).

3. Таким образом, взяв точку в полуплоскости, отличной от той, в которой находится последняя вершина двухзвенной ломаной, мы получим следующую вершину A_4 трехзвенной ломаной $A_1A_2A_3A_4$ (рис. 4.19, *б*).

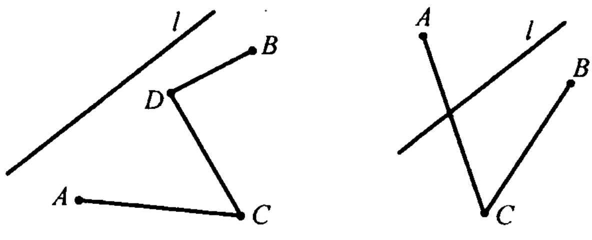
Также поступаем для любого количества звеньев.



а) *б)*

Рис. 4.19

4.11. Две точки, принадлежащие одной полуплоскости, можно соединить ломаной, не пересекающейся с прямой l (рис. 4.20, *а*). Две точки, лежащие в разных полуплоскостях, такой ломаной соединить нельзя (рис. 4.20, *б*).



а) *б)*

Рис. 4.20

4.12. $APKB$ — ломаная, соединяющие точки A и B и не пересекающая окружность с центром в точке O. $CSFEM$ — ломаная, соединяющая точки C и M и не пересекающая окружность с центром в точке O (рис. 4.21). Ломаной, не пересекающей данную окружность, соединить точки A и M; B и M нельзя.

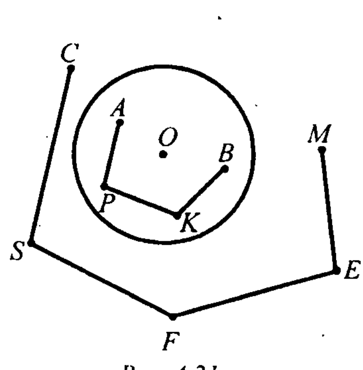


Рис. 4.21

4.13. Нам известно, что ломаная должна иметь два звена, лежащие на одной прямой. Какие выводы из этого можно сделать?

1. Два звена ломаной A_1A_2 и A_4A_5 должны лежать на прямой a и быть разделены отрезком A_2A_4 (рис. 4.22, *а*). Сначала будем строить незамкнутую ломаную.

2. Ломаная, два звена которой лежат на одной прямой, должна иметь не менее четырех звеньев, так как два звена, принадлежащие одной прямой, не могут быть соседними на основании п. 1.

3. Два звена должны разделяться как минимум одним звеном, которое также не может принадлежать этой прямой. Отсюда вытекает необходимость четвертого звена для соединения всех звеньев в единое целое (рис. 4.22, *б–д*).

4. Чтобы получить замкнутую ломаную с наименьшим количеством звеньев, два из которых лежат на одной прямой, необходимо иметь 6 звеньев (рис. 4.22, *е, ж*).

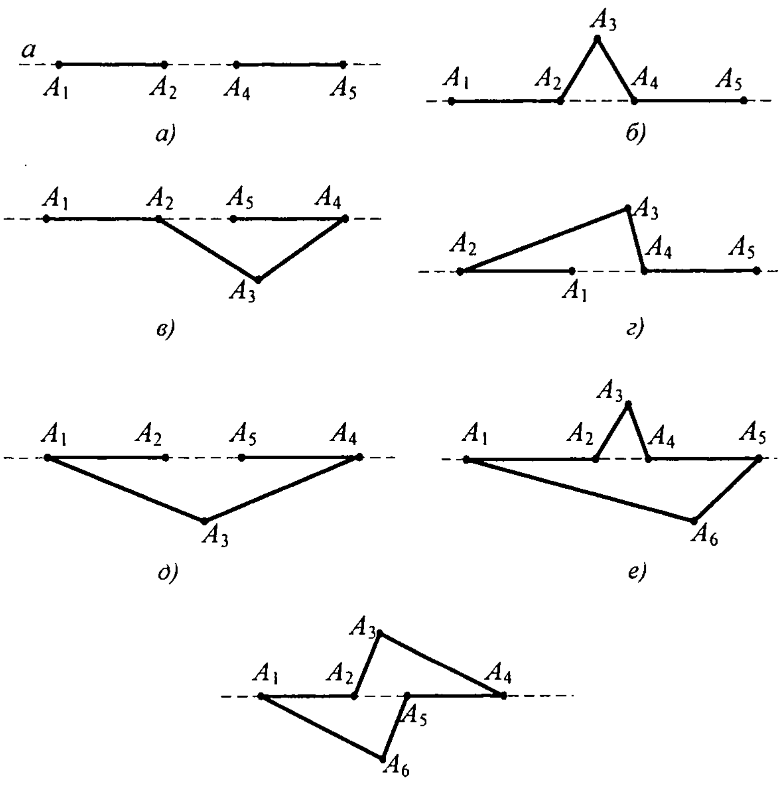


Рис. 4.22

4.14. Для подсчета количества ломаных важно учесть тот факт, что точки A, B и C на рис. 4.6, *а* принадлежат одной прямой, а на рис. 4.6, *б* точки A, B, C лежат на одной прямой и точки M, B, D также лежат на одной прямой.

а) Подсчитаем число двухзвенных ломаных.

1. Двухзвенных ломаных, вершинами которых являются точки, изображенные на рис. 4.6, *а*, а сторонами — отрезки с концами в этих точках, будет 9 (рис. 4.23, *а–и*).

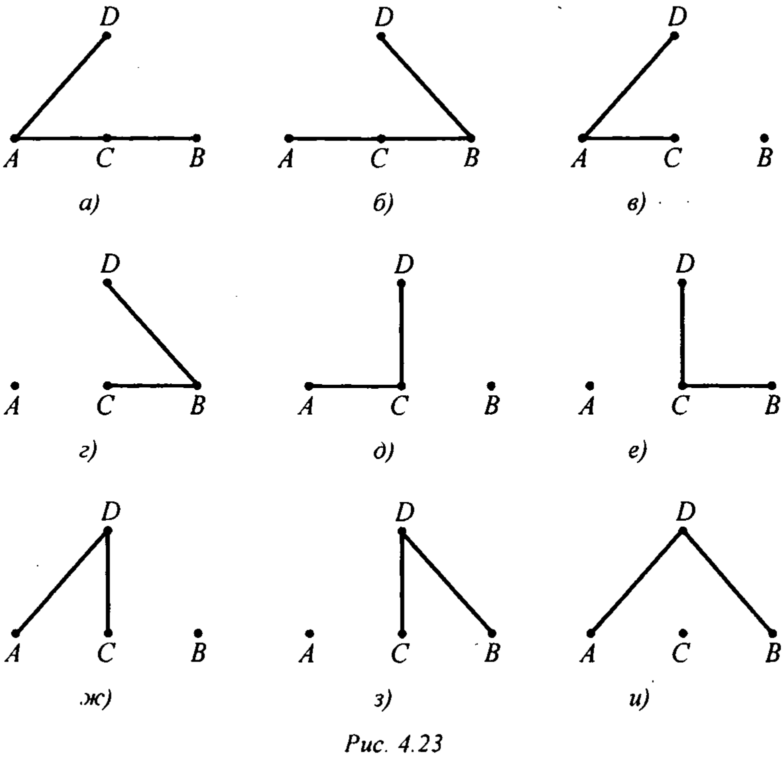


Рис. 4.23

2. Для точек, изображенных на рис. 4.6, *б*, таких ломаных существует 24. Это число ломаных складывается из видов ломаных, изображенных на рис. 4.24, *а–е* (этих видов шесть), а для каждого вида есть четыре варианта расположения звеньев.

3. Для точек, изображенных на рис. 4.6, *в*, ситуация похожая: видов ломаных шесть (рис. 4.25, *а–е*), а для каждого вида есть пять вариантов ломаных. Всего двухзвенных ломаных в этом случае — 30.

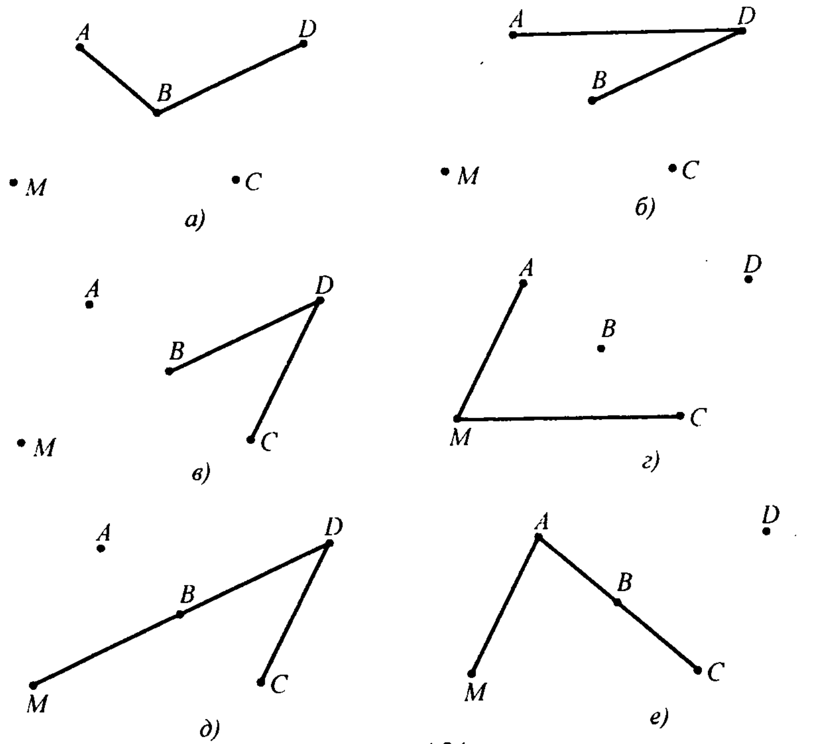


Рис. 4.24

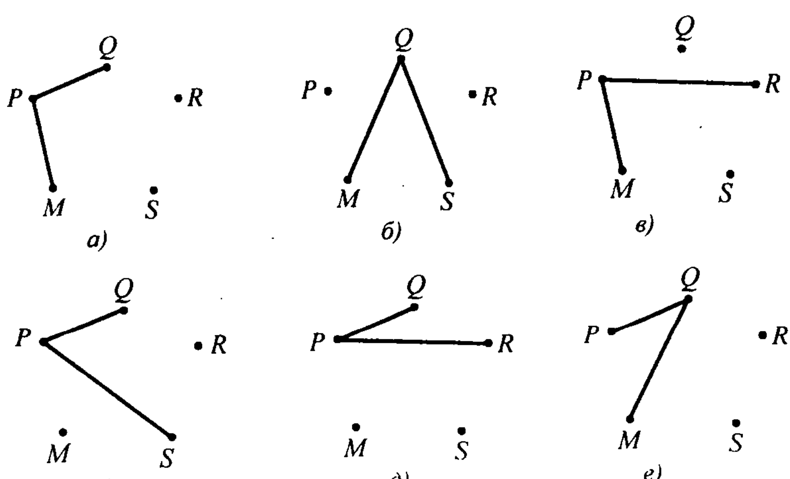


Рис. 4.25

б) Подсчитаем число трехзвенных ломаных.

1. На рис. 4.26, *а–в* показаны три варианта замкнутых ломаных для точек, изображенных на рис. 4.6, *а*, и четыре варианта простых незамкнутых ломаных (рис. 4.27, *а–г*) для тех же точек. Таким образом, мы имеем 7 вариантов ломаных для точек, изображенных на рис. 4.6, *а*.

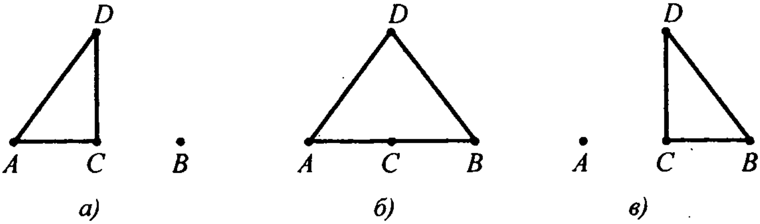


Рис. 4.26

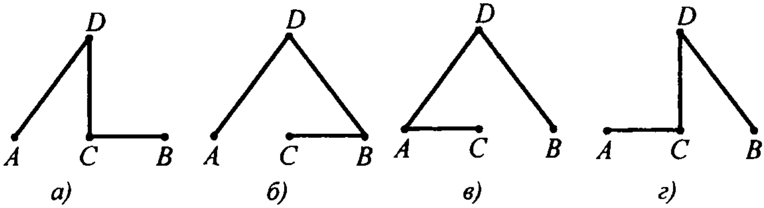


Рис. 4.27

2. Рассмотрим точки, изображенные на рис. 4.6, *б*. Имеем восемь вариантов замкнутых ломаных: типа *MDCM* (рис. 4.28, *а*) — 4 (*MDCM, ACMA, DMAD, ACDA*); типа *BDCB* (рис. 4.28, *б*) — тоже 4 (*BMCB, BCDB, BMAB, BADB*).

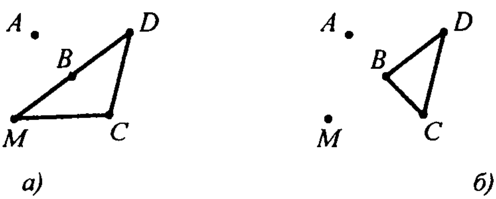


Рис. 4.28

Вообще же для образования трехзвенной простой ломаной необходимы четыре различные точки, каждые три из которых не лежат на одной прямой, или набор из четырех точек, где только одна точка не принадлежит прямой, на которой расположены три остальные.

Причем возможны случаи: а) если каждые три точки из четырех не принадлежат одной прямой, тогда для каждого вида ломаных (рис. 4.29, *а–в*) есть по 4 возможных варианта; б) если только одна точка из четырех не принадлежит прямой, на которой расположены остальные три, то смотри рис. 4.29.

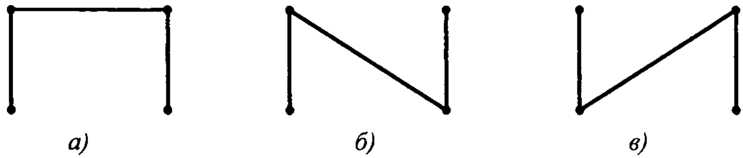


Рис. 4.29

В нашем случае количество наборов по четыре точки из пяти точек дает 5 вариантов, из них 4 варианта типа б) и 1 вариант типа а).

Следовательно, всего трехзвенных ломаных для точек на рис. 4.6, *б*: $S = 8 + 1 \cdot 12 + 4 \cdot 4 = 36$.

3. Рассмотрим точки на рис. 4.6, *в*. Для образования трехзвенной замкнутой ломаной необходимы три точки, не лежащие на одной прямой. На данном рисунке их $C_5^3 = \frac{5!}{3!2!} = 10$.

Для образования трехзвенной незамкнутой простой ломаной необходимы 4 точки. На рис. 4.6, *в* каждые 3 точки из четырех не принадлежат одной прямой. Таких наборов будет $C_5^4 = \frac{5!}{4!} = 5$. Всего же таких ломаных будет $S_1 = 5 \cdot 12 = 60$. Итого трехзвенных ломаных на рис. 4.6, *в* $S = 10 + 60 = 70$.

4.15. 1. Пусть A_1, B_1, C и D — вершины данного квадрата (рис. 4.30, *а*). На рис. 4.30, *а–д* изображены 5 нужных нам ломаных.

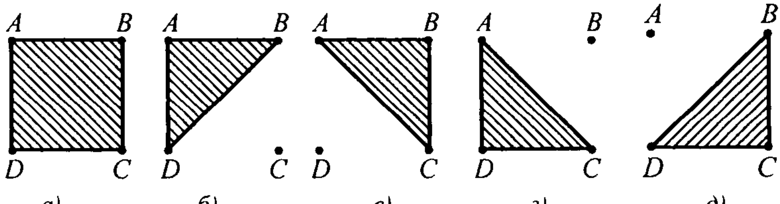


Рис. 4.30

2. Данная задача является частным случаем задачи 4.14 п. 2. Учитывая рис. 4.29, получаем 12 простых незамкнутых ломаных. В результате подсчета двухзвенных ломаных для рис. 4.6, *б* задачи 4.14 получаем еще 12 ломаных. Итого 24 возможных варианта.

В задаче требуется показать лишь 20 возможных простых незамкнутых ломаных. Это можно сделать, выбрав любые 20 из 24.

4.16. *Решение.* 1. Отметим нужные для решения точки квадрата (рис. 4.31).

2. Из точки A можно пойти к точке B или к точке H, в силу симметрии это будут равноправные возможности.

3. Пойдем, например, к точке B. Далее можно идти либо к точке C, либо к точке O и т.д.

4. Всего получится 6 различных ломаных, соединяющих точку A с точкой E.

5. Пойдя в точку H, получим еще 6 ломаных.

6. Всего имеем 12 ломаных.

4.17. Выполнить требуемое в задаче, имея в виду только простую ломаную, не удается. Поэтому построим четырехзвенную ломаную, пусть даже не простую.

1. Введем обозначения, как показано на рис. 4.32, *а*.

2. Построить четырехзвенную ломаную, проходящую через все точки A_1; ..., A_9, не выходя за рамки квадрата $A_1A_7A_9A_3$, не удастся. Для этого требуется как минимум 5 звеньев некоторой ломаной.

3. Чтобы построить четырехзвенную ломаную, проходящую через все точки A_1, ..., A_9, нужно выйти за границы квадрата $A_1A_7A_9A_3$.

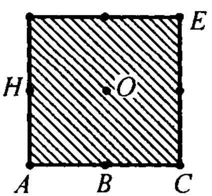
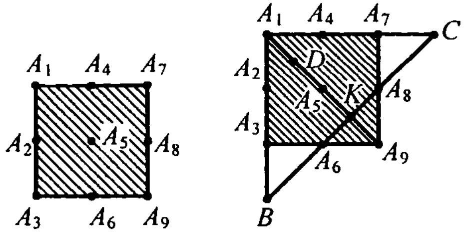


Рис. 4.31



а) *б)*

Рис. 4.32

4. $A_1BCA_1A_9$ — искомая ломаная, причем звену A_1B принадлежат 4 точки — A_1, A_2, A_3, B; звену BC — 4 точки — B, A_6, A_8, C; звену CA_1 — 4 точки — A_1, A_4, A_7, C; на звене A_1A_9 — 3 точки (рис. 4.32, *б*).

5. В качестве четвертой точки, принадлежащей звену A_1A_9, нельзя взять точку K, так как тогда на звене BC будут лежать 5 точек, что противоречит условию задачи.

6. Четвертая точка, принадлежащая последнему звену ломаной, должна лежать либо на отрезке A_1K, либо на луче KA_9. Это точка D (рис. 4.32, *б*).

4.18. Всего 12 ломаных.

4.20. а) Начнем с построения замкнутой семизвенной ломаной.

1. Будем рисовать нашу ломаную постепенно, по звеньям (рис. 4.33, *а–в*).

2. Только третье звено даст одну точку самопересечения (рис. 4.33, *в*).

3. Четвертое звено может пересечь два звена (еще 2 точки) (рис. 4.33, *г*).

4. Пятое звено может пересечь тоже 2 звена, так как ломаная замкнутая (рис. 4.33, *д*).

В случае незамкнутой ломаной таких точек было бы три. Итак, всего точек 5.

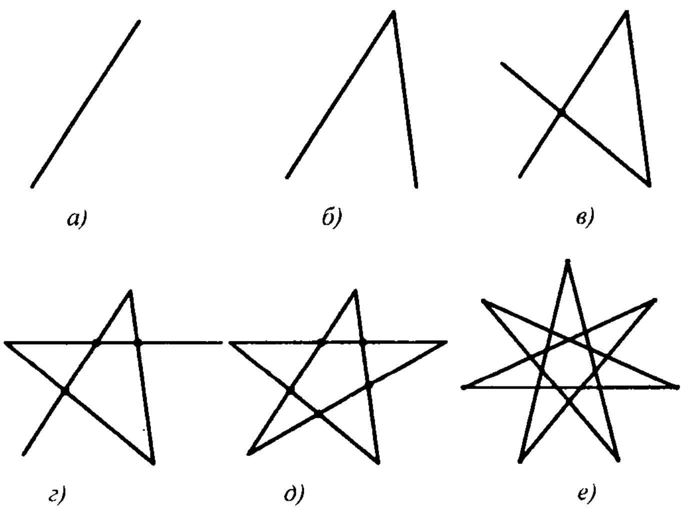


Рис. 4.33

Для семизвенной ломаной: третье звено даст 1 точку, четвертое — 2, пятое — 3, шестое — 4, седьмое — 4 точки (по тем же соображениям). Всего 14 точек (рис. 4.33, *е*). И т.д. Если ломаная незамкнутая, то точек самопересечения будет на 1 больше, чем для замкнутой.

б) Построим ломаную с четным числом звеньев.

Для ломаной с четным числом звеньев $2n$: 1) если она замкнутая, то число точек самопересечения будет столько же, что и для незамкнутой ломаной с числом звеньев $2n - 1$ (последнее звено данных точек не дает); 2) для незамкнутой ломаной число точек считается тем же способом, что и раньше.

4.21. У замкнутой ломаной из 5 звеньев будет 5 точек самопересечения, у семизвенной ломаной — 14 точек, у ломаной с четным числом звеньев — $2n$. Если она замкнутая, то точек самопересечения будет столько же, что и для незамкнутой ломаной с числом звеньев $2n - 1$ (последнее звено данных точек не дает); для незамкнутой ломаной число точек определяется тем же способом, что и раньше.

4.22. Противоречие есть. Изменить нужно второе и третье условия, каждое звено должно пересекаться два раза и ломаная должна иметь 5 звеньев.

4.23. а–в) Да; г) нет; д) да.

4.24. Возможный разрез показан на рис. 4.34.

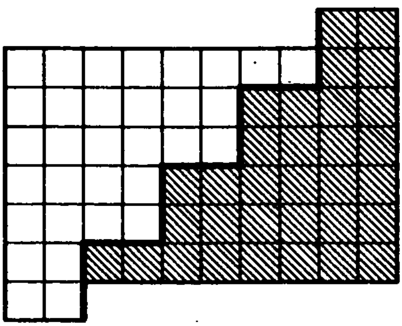


Рис. 4.34

4.26. а) $n(n - 3)$; б) $n(n - 4) + 1$.

4.28. Решение этого исследовательского задания взято из юбилейного 200 номера журнала «Квант», и оно предложено учеником 7-го класса школы № 57 г. Москвы А. Шаниным.

2. Ответ: При всех четных n ($n \geq 6$); для решения А. Шанин предъявляет ломаную типа (6, 1), а затем применяет к ней

операцию *вставки крестика* (рис. 4.35, *а*) или *вставки гармошки* (рис. 4.35, *б*).

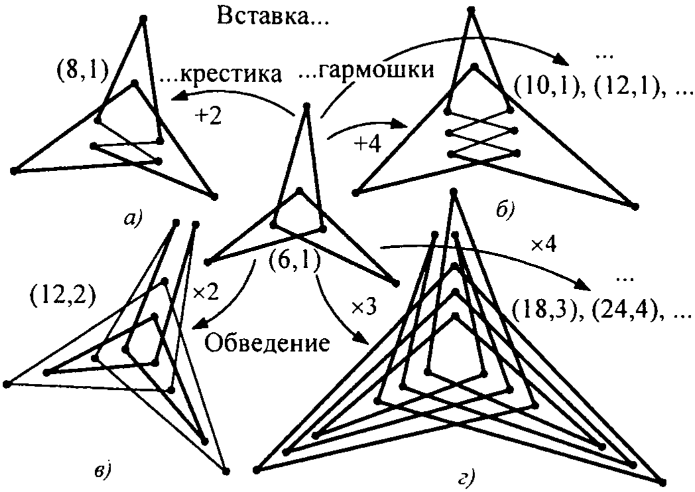


Рис. 4.35

При нечетных же n не существует ломаных типа $(n, 1)$. Верен более общий факт: *если оба числа n и m нечетны, то ломаной типа (n, m) не существует.* В самом деле, звенья ломаной типа (n, m) пересекаются только попарно, поэтому общее число точек пересечения равно $\frac{nm}{2}$, что невозможно, когда оба числа n и m нечетны.

3. Ответ: Да. А. Шанин решает эту задачу, начиная с того же примера ломаной типа (6,1), а затем применяет к ней операцию обведения (рис. 4.35, *в, г*).

4. Эта задача не решена до конца, хотя А. Шанин сильно продвинулся в ее решении, используя при этом разные варианты операции суммы (рис. 4.36). Результаты Андрея можно свести в следующую таблицу:

ломаная типа (n, m)	существует	не существует	вопрос открыт
m — четно	$n \geq 2m+6$ или $n = m+3$	$n \leq m+2$	$m+4 \leq n \leq 2m+5$
m — нечетно	n — четно и $n \geq 8m+12$	n — нечетно или $n \leq m+2$	n — четно и $m+3 \leq n \leq 8m+10$ кроме $n = 4m+6$

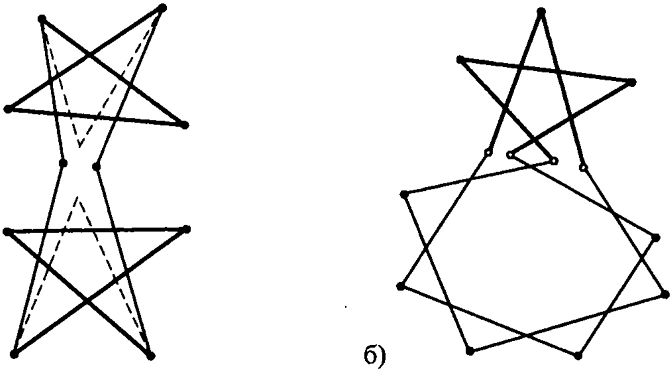


Рис. 4.36

4.2. ДЛИНА ЛОМАНОЙ

4.29. $AE < 10$, а значит, расстояние между точками A и E может быть любым положительным числом, меньшим 10.

4.31. 1. Любая трехзвенная ломаная, звеньями которой являются ребра куба, всегда будет иметь длину 3 см. Если же хотя бы одно из звеньев будет являться диагональю грани куба, то длина соответствующей трехзвенной ломаной будет больше 3 см. Таким образом, длина любой трехзвенной ломаной, вершинами которой являются вершины куба, будет не менее 3 см.

2. Любая четырехзвенная ломаная, звеньями которой являются ребра куба, всегда имеет длину 4 см. Если же хотя бы одно из звеньев будет являться диагональю куба, то длина соответствующей четырехзвенной ломаной будет больше 4 см. Это означает, что длина любой четырехзвенной ломаной, вершинами которой являются вершины куба, будет не меньше 4 см.

4.32. *Решение.* 1. Дана ломаная $ABCD$, $AB = 1$ см, $BC = 2$ см, $CD = 3$ см (рис. 4.37).

2. Длина отрезка $AD < AB + BC + CD = 6$ см. (1, теорема о длине ломаной).

3. AD может быть 0,5 см, так как $6 > 0,5$.

4. Расстояние AD не может быть равным 6 см.

5. Расстояние AD может быть равным 1 см.

6. Расстояние AD не может быть равным 7 см.

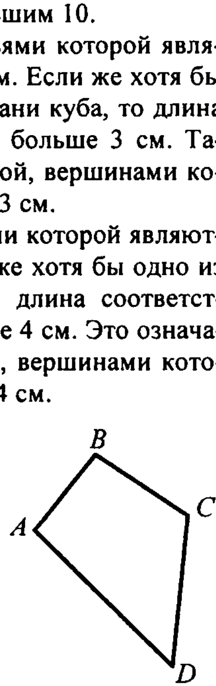


Рис. 4.37

4.33. 1) $0,5 < AB < 10,5$; 2) $0 \le AB < 12$ см.

4.34. Следует воспользоваться теоремой о длине ломаной: длина ломаной больше расстояния между ее концами. Ответ: 1) не существует; 2) существует; 3) не существует.

4.36. Ломаная, состоящая из ребер заданного куба, может иметь 5 звеньев. Длина ломаной, все звенья которой — ребра куба, может иметь длину, большую 10 см.

4.38. *Решение.* 1. MTC, ABC — ломаные (дано), (рис. 4.13).

2. Введем обозначения: l_1 — длина ломаной $AMTC$; l_2 — длина ломаной ABC; $l_2 < l_1$.

3. $l_2 < l_1$ (требуется доказать).

Замечаем, что

4. $l_1 = AT + TB + BK + KC$ (1, 2, свойство измерения отрезков)

5. $l_2 = AB + BC$ (1, 2, свойство измерения отрезков)

6. На данном рисунке точки A, B, M и B, T, C образуют треугольники.

7. $AM + MB > AB$ (1, неравенство треугольника).

8. $BK + KC > BC$ (1, неравенство треугольника).

9. Если сравнивать равенства 4 и 5 с неравенствами 7 и 8, то получим, что $l_2 < l$.

4.39. *Решение.* 1. AMC и $ATKC$ — ломаные (дано) (рис. 4.14).

2. Длина ломаной AMC больше длины ломаной $ATKC$ (требуется доказать).

3. l_1 длина ломаной AMC,

$l_1 = AM + MC = AT + TM + MK + KC$ (1, свойство длины отрезков).

4. l_2 — длина ломаной $ATKC$,

$l_2 = AT + TK + KC$ (1, свойство длины отрезков).

5. $TK < TM + MK$ (1, неравенство треугольника).

6. Сравнив равенства 3 и 4 и неравенство 5 получим, что $l_1 > l_2$.

4.40. Доказательство. 1. Ломаная ABC, ломаная AMC, точка B принадлежит отрезку MC (дано) (рис. 4.15).

2. Длина ломаной ABC меньше длины ломаной AMC (требуется доказать).

Прежде всего следует увидеть три ломаные ABC, AMB и AMC.

3. $AB + BC$ — длина ломаной ABC (1, определение длины ломаной).

4. $AM + MB + BC$ — длина ломаной AMC (1, определение длины ломаной, свойство длины отрезка).

Мы должны понять, что полезно сравнить отрезок AB и сумму отрезков $AM + MB$.

5. $AM + MB > AB$ (1, теорема о длине ломаной).

6(2). Если сравнить пункты 3, 4 и учесть результат пункта 5, то мы получим то, что требуется доказать: $AB + BC < AM + MB + BC$.

4.41. Доказательство. 1. Ломаная ABC, ломаная AMC (дано) (рис. 4.16).

2. Длина ломаной ABC меньше длины ломаной AMC (требуется доказать).

3. $AB+BC$ — длина ломаной ABC (1, определение длины ломаной).

4. $AM + MC$ — длина ломаной AMC (1, определение длины ломаной).

Решение этой задачи в самом начале похоже на решение предыдущей задачи, однако получить результат не удается, нужна нестандартная идея решения. Как же помочь ученику выдвинуть эту идею? Надо внимательно посмотреть на рисунок к предыдущей задаче.

5. (**Новая идея!**) Продолжим отрезок AB до пересечения с отрезком MC (построение) (рис. 4.38).

Рассмотрим ломаные ABC и ADC, для которых можно использовать результат предыдущей задачи, то есть тот факт, что длина ломаной ABC меньше длины ломаной ADC.

6. $AB + BC < AD + DC$ (5, задача 4.38).

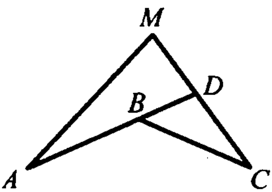


Рис. 4.38

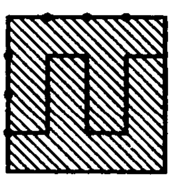
Рассмотрим ломаные ADC и AMC, для которых также используем результат предыдущей задачи, то есть длина ломаной ADC меньше длины ломаной AMC:

7. $AD + DC < AM + MC$.

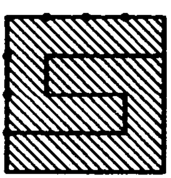
Если сравнить неравенства в п.п. 6 и 7, то мы получим то, что требуется доказать:

8 (2). $AB + BC < AM + MC$.

4.42. Варианты решений см. на рис. 4.39, *а* и *б*.



а)

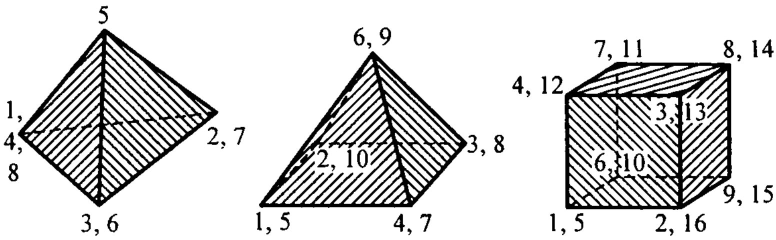


б)

Рис. 4.39

4.43. Если длина каждого ребра 1 см, то необходима проволока длиной: а) 7 см (рис. 4.40, *а*); б) 9 см (рис. 4.40, *б*); в) 15 см (рис. 4.40, *в*).

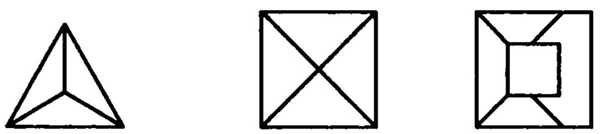
Цифрами на рисунках обозначен порядок обхода.



а) *б)* *в)*

Рис. 4.40

Первую часть задачи можно свести к следующей: не отрывая карандаш от бумаги, обвести все отрезки фигур, изображенных на рис. 4.41, *а–в*.



а) *б)* *в)*

Рис. 4.41

Глава 5
УГЛЫ И ИХ СВОЙСТВА

5.1. ЛУЧИ. НАПРАВЛЕНИЯ

5.1. Прямая *AB*, точка *C*, лучи *CA* и *CB*.

5.2. На рис. 5.2 мы видим два луча с началом в точке D и два луча с началом в точке C.

5.3. Каждая отмеченная на прямой точка задает два луча. Следовательно, на рис. 5.2 три точки задают 6 лучей.

5.4. Две точки задают два различных направления.

5.5. На плоскости существует бесконечное множество различных направлений.

5.6. Для того чтобы получить на прямой две полупрямые с общим началом, нужно на ней отметить одну точку.

5.7. б) Три разных луча с общим началом могут располагаться так, как показано на рис. 5.23, *а*, *б*. На рис. 5.23, *б* лучи не лежат в одной плоскости.

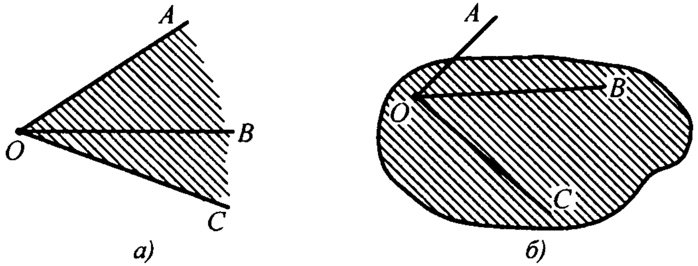


Рис. 5.23

5.8. Два луча с различными начальными точками могут лежать в одной плоскости (рис. 5.24, *а*), а могут и не лежать (рис. 5.24, *б*).

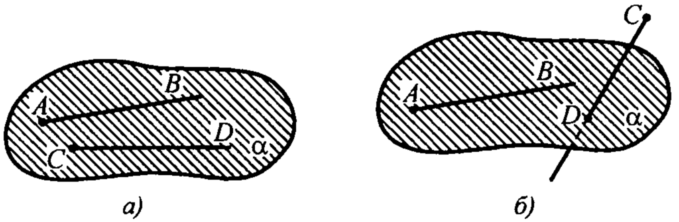


Рис. 5.24

5.9. Три луча с общим началом не всегда лежат в одной плоскости.

5.10. Бесконечное множество. Направлений будет столько же, сколько лучей.

5.11. О понятиях сонаправленных и противоположно направленных лучей можно прочитать в основном теоретическом содержании к данному разделу.

5.12. Вершины куба задают: а) 6 различных направлений, т.к. каждое ребро имеет два разных направления.

5.13. Могут.

5.14. *OM* и *ON*.

5.15. На рис. 5.4 мы видим два направления.

5.16. Отрезок.

5.17. а) Пересечением двух лучей, не лежащих на одной прямой, может быть либо точка, либо пустое множество.

5.18. а) Одна. б) Две. в) Одна.

5.19. а) $A \in a$; б) $l \subset p$; в) $M \notin a$.

5.20. а) Два. б) В общем случае шесть, однако если эти точки лежат на одной прямой, то они определяют только два направления. в) В общем случае 12. Но возможны следующие случаи: 1) точки — вершины трапеции — 10 направлений; 2) точки — вершины параллелограмма — 8 направлений; 3) три точки на одной прямой и одна вне ее — 8 направлений; 4) все точки расположены на одной прямой — только два направления.

5.2. УГЛЫ И ИХ ИЗМЕРЕНИЕ

5.2.1. Понятие угла

5.21. Лучи OA и OB с общим началом O определяют два угла. Объединение получившихся углов — вся плоскость, пересечение — два луча OA и OB (рис. 5.7).

5.22. 12 углов, так как у треугольной пирамиды 4 грани, а в каждой грани расположено по 3 угла.

5.23. 24 различных угла: 1) 6 — число граней куба, 4 — число углов в каждой грани: $6 \cdot 4 = 24$ угла;

2) 8 — число вершин куба, 3 — число углов, исходящих из каждой вершины: $8 \cdot 3 = 24$ угла.

5.24. Чтобы образовался угол, два луча должны иметь общее начало. При этом образуются два угла (рис. 5.25).

5.25. Если угол — выпуклая фигура, то взяв два луча с общим началом мы получим один угол. Два угла получить нельзя. Три угла мы имеем, если луч проходит между сторонами угла. Чтобы получить три угла, нужно провести луч между двумя соседними лучами.

5.26. У развернутого угла стороны должны являться полупрямыми одной прямой, так как в противном случае угол не будет развернутым. Угол AOB, изображенный на рис. 5.25, не развернутый.

5.27. Развернутый угол — выпуклая фигура.

5.29. 1. На рис. 5.26 мы имеем: а) $2 \cdot (1 + 2 + 3) = 12$ углов; б) $2 \cdot (1 + 2 + 3 + 4) = 20$ углов.

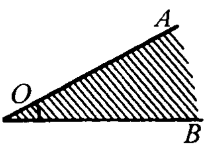
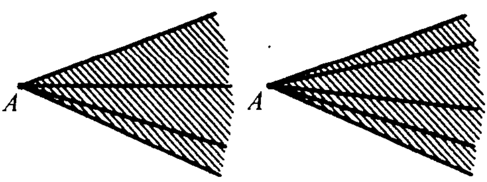


Рис. 5.25



а) *б)*

Рис. 5.26

5.30. а) У углов общая вершина (рис. 5.27, *а*); б) у двух углов общая сторона (рис. 5.27, *б*); в) прямые, которым принадлежат стороны двух углов, могут пересекаться (рис. 5.27, *в*); г) стороны одного угла пересекают стороны другого угла (рис. 5.27, *г*); д) см. рис. 5.27, *д, е*).

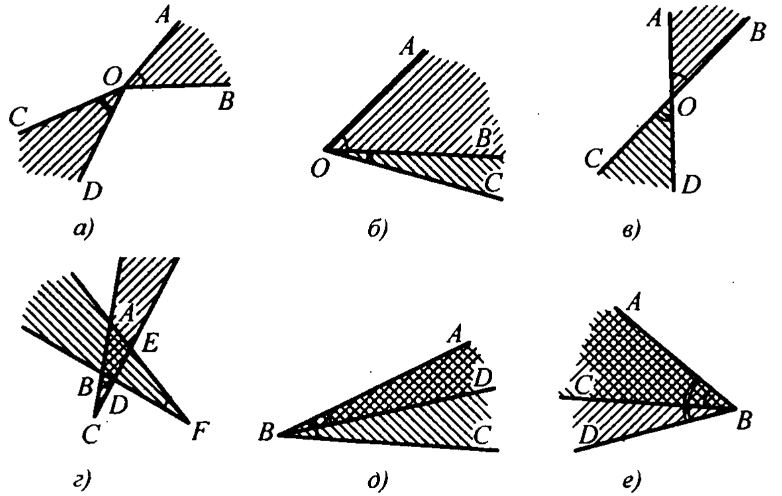


Рис. 5.27

5.31. *Решение*:

Угол, изображенный на рис. 5.11, *а* является выпуклой фигурой, а угол на рис. 5.11, *б* — невыпуклой фигурой.

5.33. Если считать только выпуклые углы, то получится 12 углов.

5.2.2. Измерение углов

5.39. Единицами измерения величины углов являются: градус, минута, секунда.

5.40. От данной полупрямой можно отложить два угла, равных 60°, находящихся в разных полуплоскостях относительно прямой, содержащей данную полупрямую.

5.41. Ошибочные утверждения: б), в), г).

Истинные утверждения: а), д).

5.42. 61°.

5.43. а) 110°; б) 119°; в) 179°.

5.44. 130°.

5.45. На рис. 5.16, *а* имеется два острых угла. На рис. 5.16, *б* имеется 7 острых углов.

5.46. 240′; 1201′; 1320′; 2180′; 6000′.

5.47. 360″; 3600″; 3610″; 740″.

5.48. 25°36″, 25°36′, 25°36′24″, 25°36′40″.

5.50. а) 180°; б) 30°; в) 90°.

5.51. а) 97°30′; б) 90°; в) 172°30′.

5.52. $\angle AOC = 60°$.

5.53. а) Луч OC не проходит между сторонами $\angle AOB$. Луч OA проходит между сторонами $\angle BOC$.

б) 1. Если луч OC проходит между сторонами угла AOB, то $\angle AOB = \angle AOC + \angle COB$, или $100° = \angle AOC + 90°$ (рис. 5.28, *а*).

2. Луч OC не проходит между сторонами $\angle AOB$ (рис. 5.28, *б*).

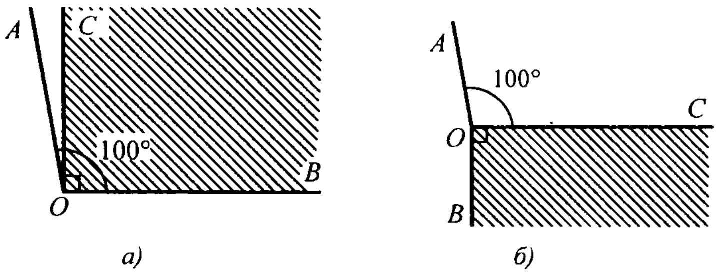


Рис. 5.28

в) Возможны случаи: луч OC будет проходить между сторонами $\angle AOB$, $\angle AOB = \angle AOC + \angle BOC$ (рис. 5.29, *а*); когда $\angle AOB$ — развернутый, то луч OC в любом расположении будет проходить между сторонами $\angle AOB$ (рис. 5.29, *б*); луч OC не будет проходить между сторонами $\angle AOB$, $\angle BOC = \angle BOA + \angle AOC$, тогда луч AO проходит между сторонами $\angle BOC$ (рис. 5.29, *в*).

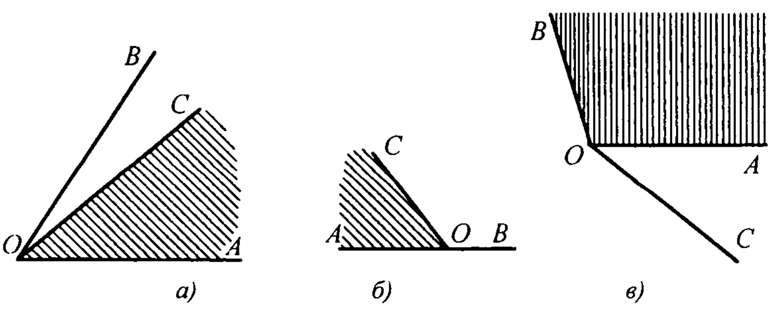


Рис. 5.29

5.54. *Решение.*

а) 1. $\angle AOB = 60°$, луч OC проходит между сторонами $\angle AOB$. (дано)

2. $\angle AOC$ на 30° больше $\angle BOC$. (рис. 5.30)

3. Найдите $\angle BOC$ и $\angle AOC$.

4. $\angle AOC + \angle COB = \angle AOB = 60°$ (1, свойство измерения углов).

5. $\angle AOC - 30° = \angle BOC$ (1, 2)

6. $\angle AOC = \angle BOC + 30°$ (5)

7. $\angle BOC + 30° + \angle COB = 60°$, $2\angle BOC = 30°$, $\angle BOC = 15°$ (4, 6, свойства измерения углов)

8. $\angle AOC = 45°$ (1, 2, 4, 7).

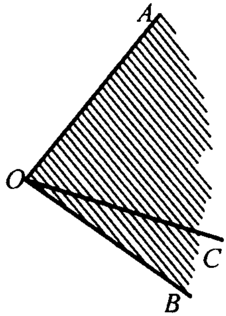


Рис. 5.30

5.55. а) 60°; б) 40°; в) 90°.

5.58. *Решение*:

Случай *а)* является классической разновидностью задач на синтетическую деятельность, ее решение не представляет никакой сложности. Искомый угол равен 52°.

Случай *б)* — гораздо труднее, так как требует использования аналитической деятельности.

Решение. 1. $\angle BOD = 80°$, $\angle AOC = 130°$ (дано) (рис. 5.15, *б*)

2. Найдите величину угла DOC.

Найти величину угла DOC сложением или вычитанием величин углов нам не удается. Поэтому начнем решать задачу «с конца», с того, что нам требуется найти:

3. $\angle DOC = \angle BOD - \angle BOC$; (1, свойство измерения углов)

4. $\angle DOC = \angle BOD - (180° - \angle AOC)$ (3, свойство измерения углов).

5. $\angle DOC = 80° - (180° - 130°) = 30°$

5.2.3. Равенство углов. Биссектриса угла

5.59. $\angle AOC = \angle COB$.

5.60. Не может.

5.61. Будет.

5.62. 1. Нет. 2. Нет.

5.63. 40°.

5.64. 15°, 30°, 25°, 67°.

5.65. а) 15°; б) 26°; в) 86°.

5.66. а) 120°; б) 150°; в) 178°.

5.67. *Решение:* 1) Чтобы вычислить искомый угол в каждом из случаев *а–г,* сначала величину полного угла (циферблата), составляющего 360°, разделим на 12 и получим 30°.

В случае *а)* величина угла между стрелками равна трем таким углам, как в случае *в),* то есть 90°.

В случае *б)* величина угла между стрелками равна пяти таким углам, то есть 150°.

В случае *г)* величина угла между стрелками складывается из величины такого угла, как в случае *в)* и его половины: 30° + 15° = 45°.

2) За час (60 мин) часовая стрелка поворачивается на 30°. Поэтому на 5° она повернется за 5 · 60/30 = 10 (мин). Минутная стрелка за 10 минут повернется на 2 · 30°=60°.

Ответ: 1) а) 90°; б) 150°; в) 30°; г) 45°; 2) за 10 минут; на 60°.

5.68. *Решение.* 1. $\angle AOB$ (дано)
2. OC — биссектриса $\angle AOB$ (дано)
3. Луч OD дополнительный к лучу OC (дано) } (рис. 5.31)
4. $\angle AOD = \angle BOD$ (требуется доказать)
5. $\angle AOC = \angle BOC$ (2, определение биссектрисы угла)
6. $\angle DOC = 180°$ — развернутый (3, определение дополнительных лучей)
7. $\angle DOA + \angle AOC = \angle DOC$.

$\angle DOB + \angle BOC = \angle DOC$, так как любой луч, исходящий из вершины развернутого угла, лежит между сторонами этого угла.

8. $\angle DOA = 180° - \angle AOC$,

$\angle DOB = 180° - \angle BOC$ (6, 7)

9(3). $\angle DOA = \angle DOB$ (5, 8),

5.69. *Решение*:

1. $\angle(ab) = \angle(ac)$ отложены от луча *a*, оба угла тупые (дано) (рис. 5.32).

2. Луч *a* не является биссектрисой $\angle(bc)$ (требуется доказать)

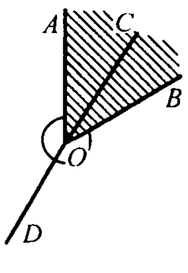


Рис. 5.31

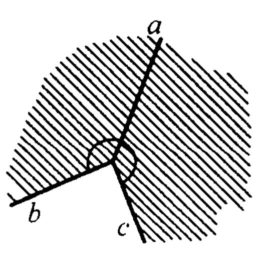


Рис. 5.32

4. $\angle(ab)+\angle(ac)>180°$ (1, 2, свойства измерения углов)

5. $\angle(bc)<180°$, т.к. $\angle(ab)+\angle(ac)+\angle(bc)=2\cdot 180°$

6. $\angle(bc)\neq\angle(ab)+\angle(ac)$ (5)

5.70. *Решение.* В этой задаче используется два понятия вопроса из данной темы: равенство углов; луч, проходящий между сторонами угла.

Главное, что нужно для решения — это рассмотреть различные случаи расположения лучей AB, AC и AD. Эти случаи изображены на рис. 5.33, *а, б, в*. Мы видим, что в случае б) луч AB не может пересекать отрезка с концами на лучах AC и AD.

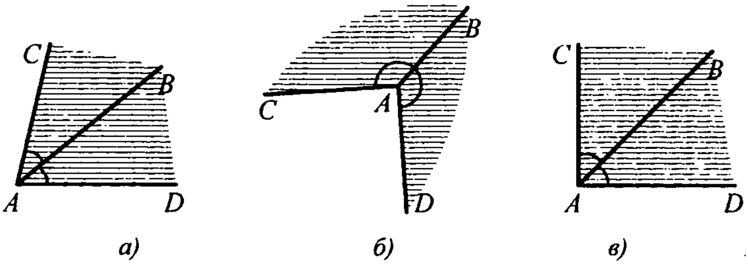


Рис. 5.33

5.71. Конечно, решение этой задачи связано с некоторыми геометрическими знаниями, которых пока нет, но можно себе представить, что учащиеся придумают какие-то примеры таких построений. Идея, на которой базируется решение этой задачи, связана с равенством углов с соответственно параллельными сторонами или с использованием параллельного переноса (понятно, что все это будет позднее).

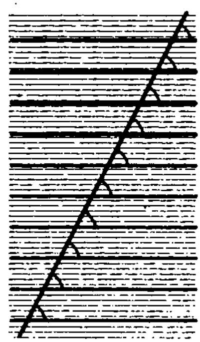


Рис. 5.34

На рис. 5.34 показано, какая идея должна появиться у Феди. Представляется, что такая идея вполне возможна.

5.72. Конечно, можно дождаться изучения признаков равенства треугольников и решения задач на построение, но важно попробовать выявить у ученика смекалку, сообразительность. Здесь нужно представлять, что у равных фигур все соответствующие элементы равны. Если мы приложим веревку так, чтобы она образовала треугольник ABC на сторонах данного угла B (рис. 5.35), то отметив, например, краской или мелом точки на веревке, соответствующие точкам A и C на рисунке, мы сможем построить равный треугольник в любом месте пола или поверхности земли.

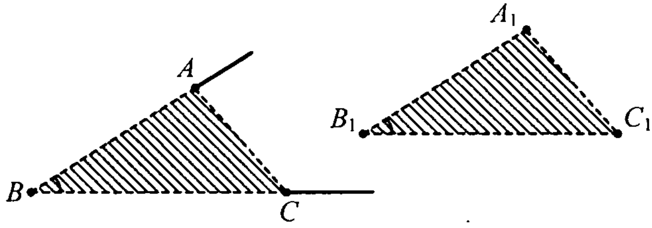


Рис. 5.35

ABC треугольник $A_1B_1C_1$, в котором угол B_1 будет равен углу B.

5.75. В этой задаче формируется представление об оси симметрии угла и вообще об осевой симметрии. Несмотря на то, что в 5–6 классах осевую симметрию часто не рассматривают, такой опыт и планы представления очень полезны. Смысл этой идеи состоит в перегибании угла по некоторой прямой до полного совпадения полученных частей. Эта прямая и будет биссектрисой.

5.76. Здесь следует воспользоваться методом перегибания квадрата как в предыдущей задаче.

5.2.4. Приложение углов и их измерений

5.79. Нужно провести луч с началом в данной точке к точке, обозначающей предмет.

5.84. 180°.

5.85. 90°.

5.86. 90°.

5.87. 48°.

5.88. 1. Азимут направления от Москвы: а) 315°; б) 124°; в) 162°; г) 187°; д) 308°; е) 253°.

5.89. Введем луч MN — направлением на север. Измерьте угол NMB.

5.90. Измерьте углы между лучами AC и AB и направлением на север. Найдите разность углов NAB и NAC.

5.91. *Решение.*

1. Точка М и место нахождения судна в море.
2. MN — направление на север.
3. MA — направлена на маяк A.
4. MB — направление движения судна.

(дано)
(рис. 5.36)

5. $140° - 75° = 65°$ — курсовой угол движения судна (1, 2, 3, 4, определение курсового угла).

5.92. *Решение.* 1. Точки B и A лежат на меридиане, причем B южнее A (дано) (рис. 5.37).

2. Луч BA имеет направление на север (1, понятие меридиана).

3. С помощью транспортира построим: $\angle NAM = 130°$ — азимут озера C из точки A (рис. 5.37);

4. $\angle ABL = 75°$ — азимут озера C из точки B.

5. Пересечение лучей BL и AM дает точку C — место расположения озера на плане.

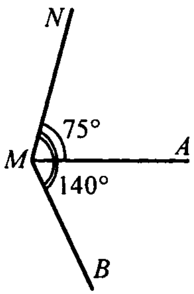


Рис. 5.36

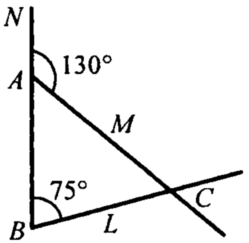


Рис. 5.37

5.93. Так как пеленг маяка равен углу с вершиной в точке A, отложенного от луча ON на север, то маяк A находится на луче MA (рис. 5.38).

5.94. *Решение.* 1. M — мельница, азимут школьного лагеря — точки A, равен 130°, расстояние до лагеря равно 800 м (дано) (рис. 5.39).

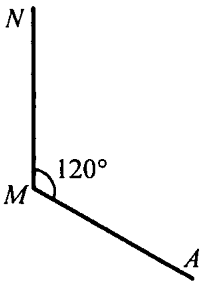


Рис. 5.38

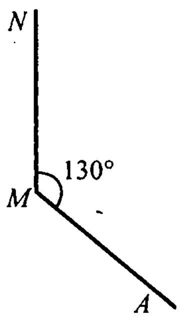


Рис. 5.39

2. Найдите место лагеря на плане.

3. Луч MA составляет с лучом на север MN угол 130° (рис. 5.39).

4. Лагерь находится на луче MA (1,3 определения азимута).

5. Для нанесения точки A на плане выберем масштаб: 1 см = 200 м, и построим отрезок MA = 4 см. Точка A — место расположения лагеря на плане (рис. 5.39).

Глава 6
ТРЕУГОЛЬНИКИ

6.1. ОПРЕДЕЛЕНИЕ ТРЕУГОЛЬНИКА

6.1. Треугольник имеет три вершины, три стороны и три угла.

6.2. У треугольника ABC: AB, BC и CA — стороны треугольника; A, B и C — вершины; $\angle A$, $\angle B$, $\angle C$ — углы ΔABC.

6.3 Против стороны AB лежит угол C, против стороны CB — угол A, против стороны AC — угол B.

6.4. Согласно аксиоме плоскости три точки, не лежащие на одной прямой задают единственную плоскость, а значит, три вершины треугольника всегда лежат в одной плоскости.

6.5. Нельзя утверждать.

6.6. Может, например, на рис. 6.22.

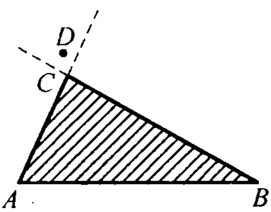


Рис. 6.22

6.8. 3 треугольника.

6.9. 8 треугольников.

6.10. 22 см.

6.11. *Решение.* Данная задача является ярким примером того, как располагаются фигуры на плоскости и в пространстве. В связи с этим возможны два случая:

1) Прямая и треугольник лежат в одной плоскости. Тогда случаи их взаимного расположения показаны на рис. 6.23, *а–в*. Мы видим, что прямая и треугольник могут не иметь общих точек, могут иметь одну общую точку, могут иметь общий отрезок MN.

2) Прямая и треугольник не лежат в одной плоскости. Случаи взаимного расположения показаны на рис. 6.23, *г–д*. Мы видим,

что прямая и треугольник могут не иметь общих точек, прямая и треугольник имеют одну общую точку.

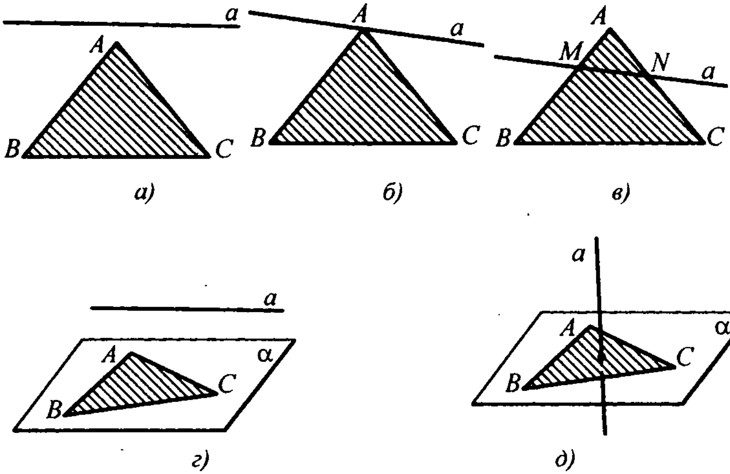


Рис. 6.23

6.13. а) 3; б) 9; в) 5 треугольников.

6.14. *Решение.* 1. Так как треугольник существует, то для длин его сторон выполняется неравенство треугольника.

2. Пусть третья сторона треугольника равна x см.

3. Значит, $4 + 7 > x > 3$.

4. Так как длина отрезка больше 3 и по условию задачи равна целому числу сантиметров, то длина искомой стороны может быть равной 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10 см.

6.15. 30 см.

6.16. 23 см.

6.17. $BC = 5$ см, $AB = 4$ см, $AC = 8$ см.

6.18. 15 см.

6.19. $AB = 8$ см, $BC = 12$ см, $AC = 16$ см.

6.20. $BC = 10$ см, $AC = 8$ см.

6.21. $AC = 12$ см, $AB = 14$ см, $BC = 9$ см.

6.22. Можно построить только один треугольник.

6.23. Если на прямой взяты 3 точки, мы имеем 3 треугольника; для 4 точек — 6 треугольников, для 5 точек — 10 треугольников; для n точек — $\frac{n(n-1)}{2}$ треугольников.

6.24. На рис. 6.24 показано, как требуемым образом расположить на плоскости 6 треугольников.

6.27. См. рис. 6.25.

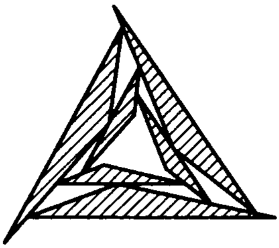


Рис. 6.24

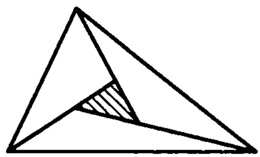


Рис. 6.25

6.29. а) Рассмотрим рис. 6.8, *а*.

Мы получаем три треугольника: *ABD*, *BDC*, *ABC*.

Рассмотрим рис. 6.8, *б*.

б) Проецируем маленькие треугольники (рис. 6.26).

1) Сосчитаем все маленькие треугольники на рис. 6.26. Их всего 3 (1, 2, 3).

2) Сосчитаем треугольники, состоящие из двух треугольников, их всего 1 (2—3).

3) Остался самый большой треугольник, состоящий из трех треугольников (1—2—3).

Всего на рис. 6.8, *б* изображено 3 + 1 + 1 = 5 треугольников.

в) Рассмотрим рис. 6.8, *в*. пронумеруем внутренние фигуры (рис. 6.27).

1) Сосчитаем все внутренние треугольники, в треугольнике *ABC*. Их всего 3 (1, 2, 4) (рис. 6.27).

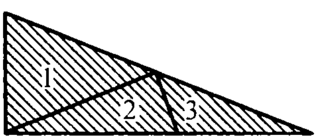


Рис. 6.26

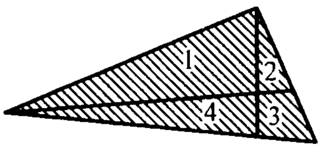


Рис. 6.27

2) Сосчитаем треугольники, состоящие из двух треугольников (1—2, 2—3, 3—4, 4—1). Их всего 4. (рис. 6.28).

3) Остался самый большой треугольник, состоящий из трех треугольников и одного четырехугольника. (1—2—3—4) (рис. 6.27).

Получилось всего 3 + 4 + 1 = 8 треугольников.

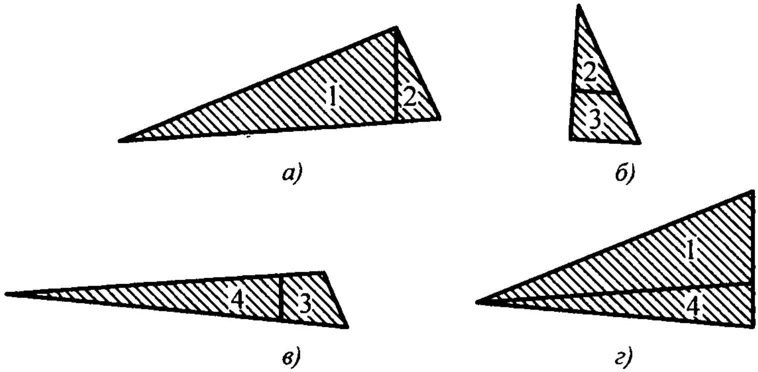


Рис. 6.28

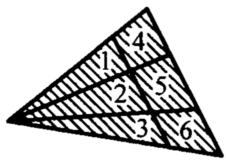


Рис. 6.29

г) Рассмотрим рис. 6.8, *г*.

Пронумеруем фигуры на рис. 6.29.

1) Сосчитаем треугольники в «нижней» части рис. 6.29, их всего шесть (рис. 6.30).

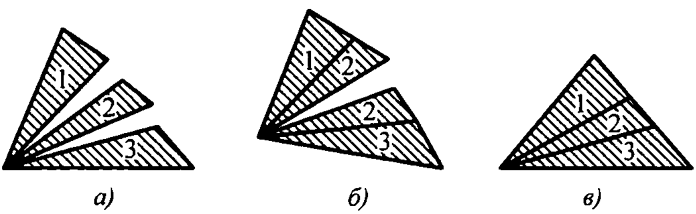


Рис. 6.30

2) Добавляем «верхнюю» часть, получаем треугольники, состоящие из треугольников и четырехугольников, треугольников получим тоже шесть (рис. 6.31).

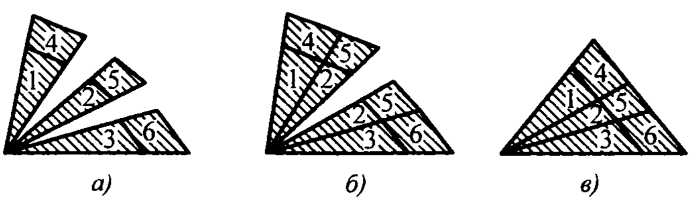


Рис. 6.31

Всего получилось:
(3 + 2 + 1) + (3 + 2 + 1) = 12 треугольников.

д) Рассмотрим рис. 6.8, *д*.

Пронумеруем треугольники (рис. 6.32).

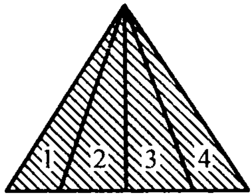
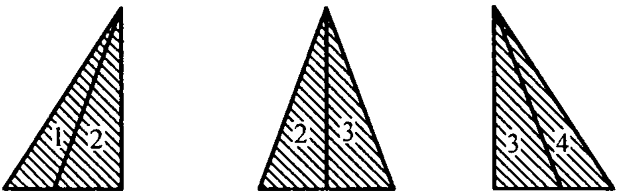


Рис. 6.32

1) Сосчитаем все маленькие треугольники. Их всего 4 (1, 2, 3, 4) (рис. 6.32).

2) Сосчитаем все треугольники, состоящие из двух треугольников (1—2, 2—3, 3—4). Их всего 3 (рис. 6.33).



а) *б)* *в)*

Рис. 6.33

3) Сосчитаем все треугольники, состоящие из трех треугольников (1—2—3, 2—3—4). Их всего 2 (рис. 6.34).

а) *б)*

Рис. 6.34

4) Остался треугольник, состоящий из четырех треугольников (1—2—3—4) (рис. 6.32).

Получилось всего 4 + 3 + 2 + 1 = 10 треугольников.

е) Рассмотрим рис. 6.8, *е*.

Пронумеруем маленькие треугольники (рис. 6.35).

Всего имеем: 13 треугольников: 6 — маленьких (1, 2, 3, 4, 5, 6), 4 — состоят из 2 маленьких треугольников (1—2, 2—3, 3—4, 4—1), 2 треугольника состоят из 3 треугольников (1—4—5, 2—3—6), 1 — большой, включающий в себя 6 маленьких треугольников (рис. 6.35).

ж) Рассмотрим рис. 6.8, *ж*.

Пронумеруем маленькие треугольники (рис. 6.36).

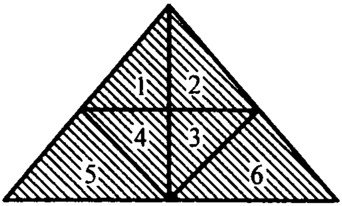


Рис. 6.35

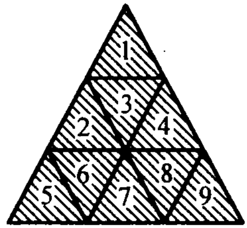


Рис. 6.36

1) Сосчитаем все маленькие треугольники, их всего 9 (рис. 6.36).

3) Так как на данном рисунке нет треугольников, состоящих из двух или трех маленьких треугольников, соединяя два маленьких треугольника, всегда получаем ромб, три треугольника получаем трапецию, сосчитаем треугольники, состоящие из 4 маленьких треугольников, их всего 3 (рис. 6.37, *а–в*).

а) *б)* *в)*

Рис. 6.37

Всего 13 треугольников.

з) Рассмотрим рис. 6.8, *з*.

Пронумеруем маленькие треугольники (рис. 6.38).

1) Сосчитаем все маленькие треугольники. Из всего 12 (рис. 6.38).

2) Сосчитаем все треугольники, состоящие из двух треугольников. (8—2, 3—9, 9—10, 10—4, 5—11, 11—12, 12—6, 1—7, 7—8, 1—2, 3—4, 5—6). Их всего 12.

3) Сосчитаем все треугольники, состоящие из трех треугольников. (2—3—4, 3—4—5, 4—5—6, 5—6—1, 6—1—2, 1—2—3). Их всего 6.

4) Сосчитаем все треугольники, состоящие из четырех треугольников. (8—2—3—9, 10—4—5—11, 12—6—1—7, 8—2—3—4, 7—1—6—5, 6—5—4—10, 3-–4—5—11, 1—2—3—9, 1—2—6—12). Их всего 9.

5) Сосчитаем все треугольники, состоящие из шести треугольников. (1—2—3—4—5—6, 8—2—3—9—4—10, 10—4—5—11—12—6, 11—5—12—6—1—7, 12—6—1—2—7—8, 1—7—8—2—3—9, 2—9—10—4—5—11). Их всего 7.

6) Остался самый большой треугольник, состоящий из двенадцати треугольников.(1 —2—3—4—5—6—7—8—9—10—11—12). (рис. 6.38).

Получилось всего 12 + 12 + 6 + 9 + 7 + 1= 47 треугольников.

и) Рассмотрим рис. 6.8, *и* (треугольник пересечен девятью прямыми) и пронумеруем маленькие треугольники (рис. 6.39).

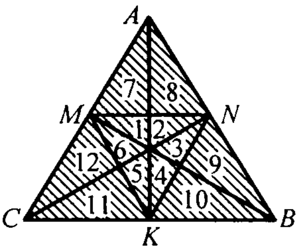


Рис. 6.38

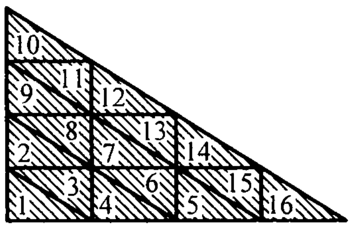


Рис. 6.39

1) Сосчитаем все маленькие треугольники, их всего 16. (рис. 6.39).

2) Так как на данном рисунке нет треугольников, состоящих из двух или трех маленьких треугольников, соединяя два маленьких треугольника, всегда получаем параллелограмм, три треугольника — получаем трапецию, сосчитаем все треугольники, состоящие из четырех треугольников, их всего 7 (рис. 6.40). (1—2—3—4, 4—7—6—5, 5—14—15—16, 2—9—8—7, 7—12—13—14, 9—10—11—12, 13—6—7—8).

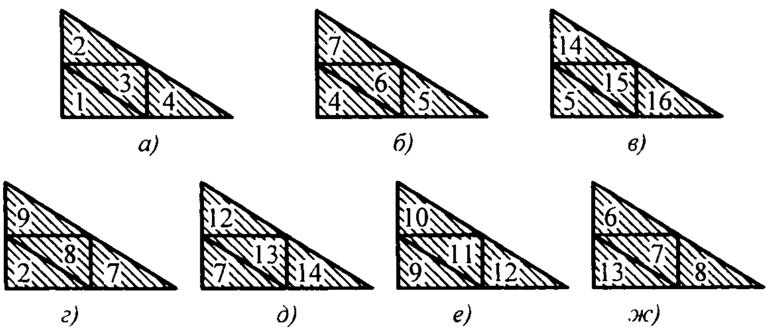
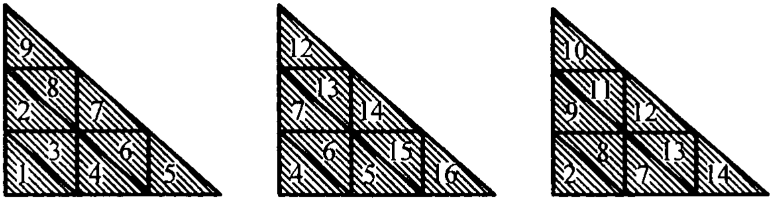


Рис. 6.40

3) Сосчитаем все треугольники, состоящие из 9 треугольников их всего 3 (рис. 6.41). (1—2—3—4—5—6—7—8—9, 4—5—6—7—12—13—14—15—16, 2—7—8—9—10—11—12—13—14).



а) *б)* *в)*

Рис. 6.41

4) Остался (только большой треугольник, состоящий из 16 треугольников (рис. 6.39).

Всего получилось: 16 + 7 + 3 + 1 = 27 треугольников.

6.30. 27 треугольников.

Следующая задача начинает серию задач на разбиение треугольника на части.

6.32. Если прямая не проходит через вершину треугольника (рис. 6.42), то мы имеем треугольник и четырехугольник. Всего имеем 2 треугольника. Можно.

6.33. Можно провести разрез через вершину треугольника и получить три треугольника (рис. 6.43).

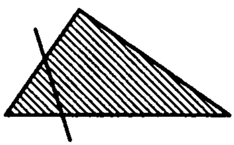


Рис. 6.42

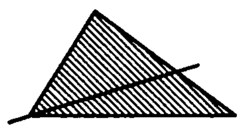
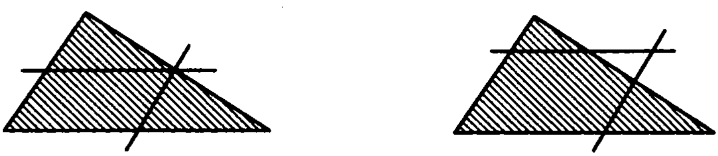


Рис. 6.43

6.34. Рассмотрим случаи проведения двух разрезов треугольника и получения трех треугольников. Это можно сделать как показано на рис. 6.44, *а, б*.



а) *б)*

Рис. 6.44

6.35. Существует три способа получения четырех треугольников с помощью двух разрезов.

Первый способ. Два разреза пересекаются внутри треугольника и ни один из них не проходит через вершину треугольника (рис. 6.45, *а*).

Второй способ. Один разрез проходит через вершину треугольника, а второй пересекает обе стороны и не пересекается с первым разрезом (рис. 6.45, *б*).

а) б) в)

Рис. 6.45

Третий способ. Оба разреза не проходят через вершину треугольника и имеют общую точку, лежащую на стороне треугольника (рис. 6.45, *в*).

6.36. Нам нужно с помощью двух разрезов получить пять треугольников. Один треугольник у нас дан.

Если из любой вершины провести прямую, пересекающую противоположную сторону, то получим еще два треугольника. В одном из полученных треугольников через вершину, лежащую на стороне исходного треугольника, проведем прямую, пересекающую противоположную сторону этого треугольника, получим еще два треугольника (рис. 6.46).

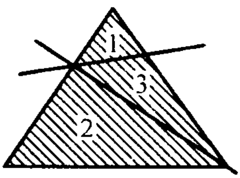


Рис. 6.46

6.37. Разобьем треугольник двумя разрезами на шесть треугольников. Случаи разбиения показаны на рис. 6.47.

а) б)

Рис. 6.47

6.38. Нельзя.

6.39. Разделим двумя разрезами треугольник на 8 треугольников.

На рис. 6.48, *а* показан это разрез.

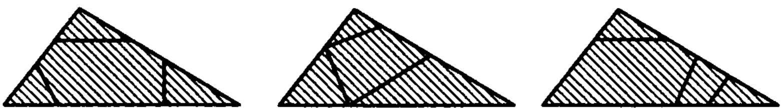
а) *б)*

Рис. 6.48

Пронумеруем фигуры, которые получаются при разрезе (рис. 6.48, *б*). Считаем треугольники: данный треугольник + 1 + 2 + 3 + + (1 и 2) + (1 и 3) + (2 и 4) + (3 и 4) = 8 треугольников.

6.40. Перейдем к разрезанию треугольника тремя разрезами.

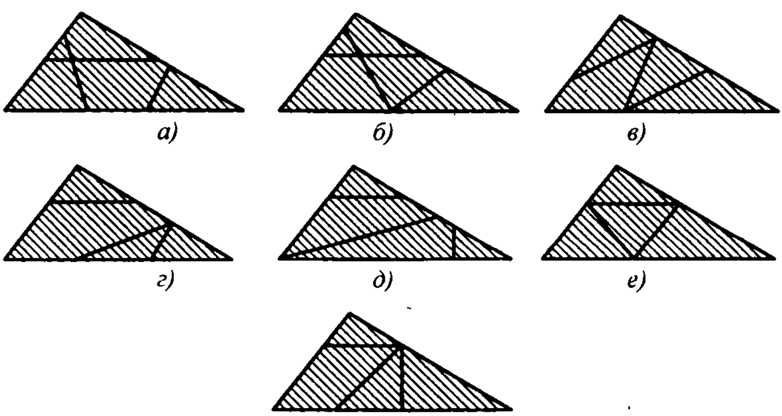
а) Ответ: на рис. 6.49, *а–в* мы получим четыре треугольника:



а) *б)* *в)*

Рис. 6.49

б) На рис. 6.50, *а–ж* мы получим пять треугольников:



а) *б)* *в)*

г) *д)* *е)*

ж)

Рис. 6.50

в) На рис. 6.51, *а–ж* мы получим шесть треугольников:

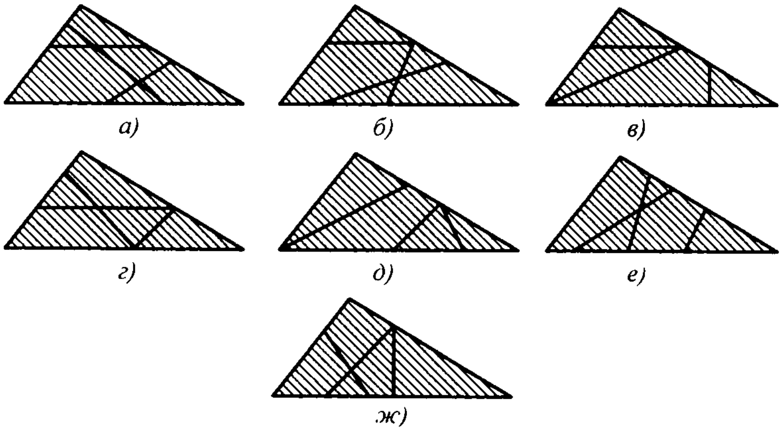


Рис. 6.51

г) На рис. 6.52, *а–н* мы получим семь треугольников:

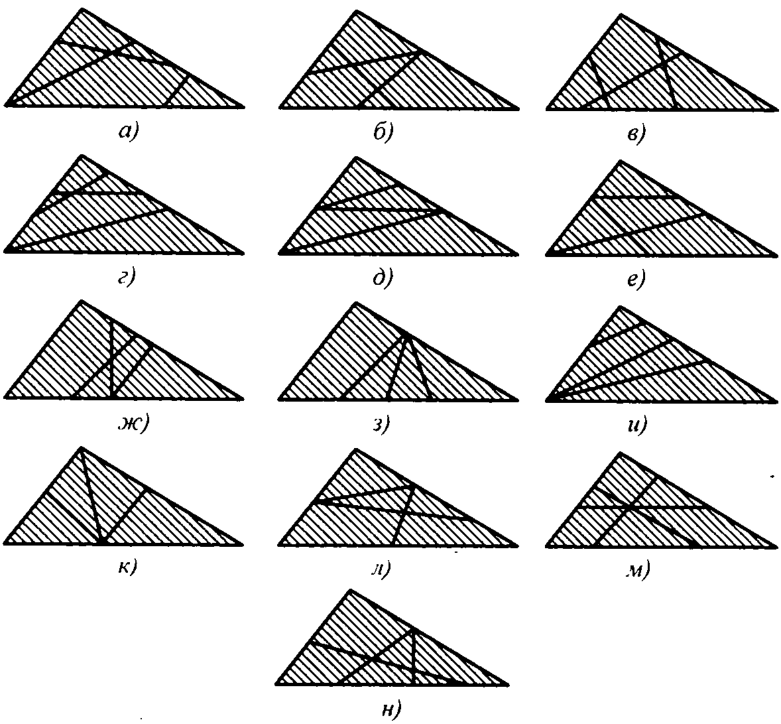


Рис. 6.52

д) На рис. 6.53, *а–л* мы получим восемь треугольников:

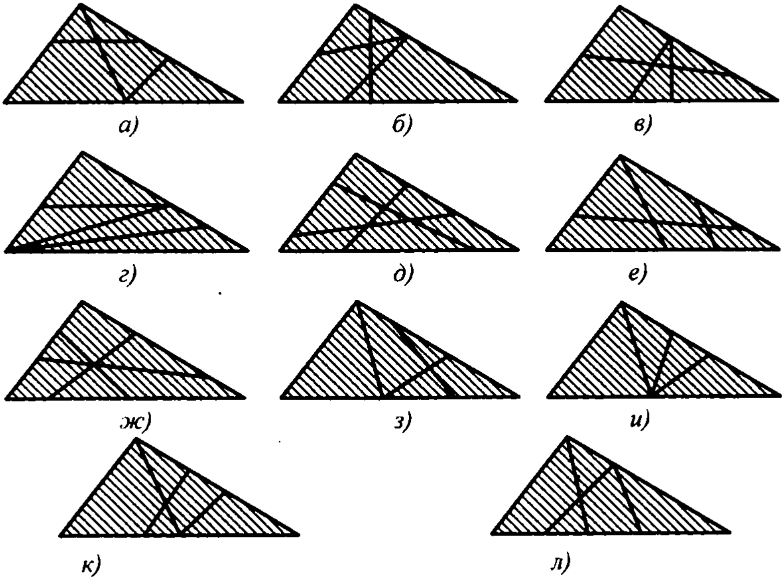


Рис. 6.53

е) На рис. 6.54, *а–к* мы получим девять треугольников:

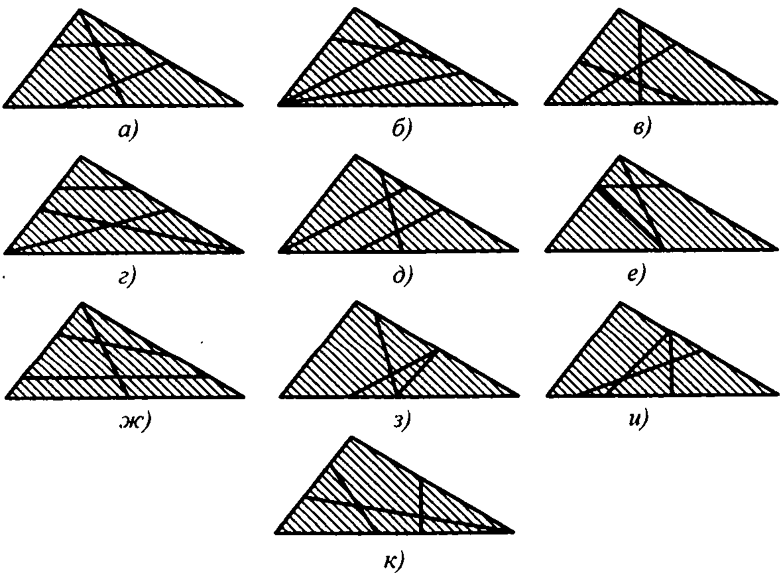


Рис. 6.54

ж) На рис. 6.55, *а–и* мы получим десять треугольников:

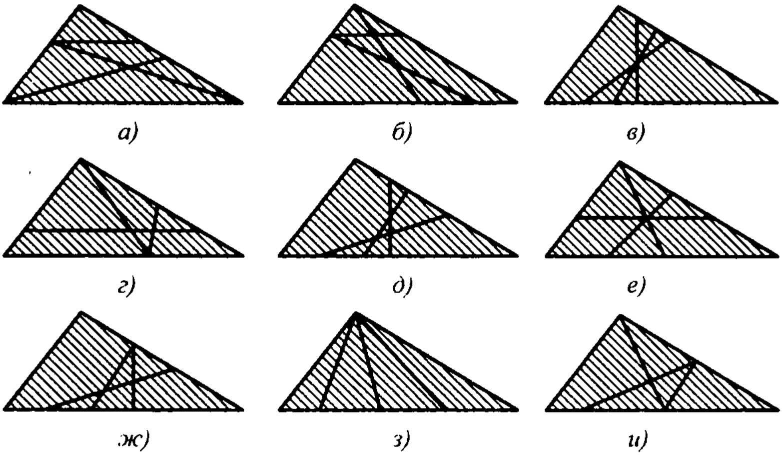


Рис. 6.55

з) На рис. 6.56, *а–д* мы получим одиннадцать треугольников:

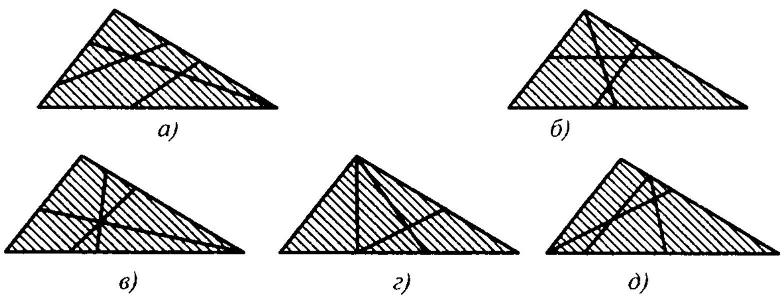


Рис. 6.56

и) На рис. 6.57, *а–г* мы получим двенадцать треугольников:

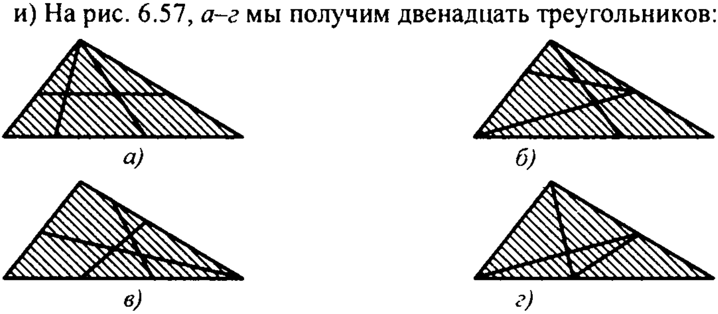


Рис. 6.57

к) На рис. 6.58, *а–в* мы получим тринадцать треугольников:

а) *б)* *в)*

Рис. 6.58

л) На рис. 6.59 мы получим четырнадцать треугольников.
м) На рис. 6.60 мы получим пятнадцать треугольников.
н) На рис. 6.61 мы получим шестнадцать треугольников.
о) На рис. 6.62 мы получим семнадцать треугольников.

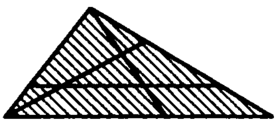


Рис. 6.59

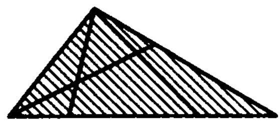


Рис. 6.60

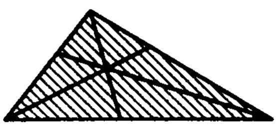


Рис. 6.61

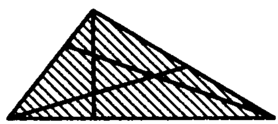


Рис. 6.62

6.2. ВИДЫ ТРЕУГОЛЬНИКОВ

6.41. MC и PC равные боковые стороны ΔMPC .

6.42. $AB = BC = CA$.

6.43. а) Против угла P лежит сторона KM, против угла K — сторона PM, против угла M — сторона KP; в) к стороне PK прилежат углы K и P, к стороне KM — углы K и M, к стороне PM — углы P и M.

6.44. Любой равносторонний треугольник является равнобедренным, но не любой равнобедренный треугольник является равносторонним.

6.45. Если в равнобедренном треугольнике основание равно боковой стороне, то он является равносторонним.

6.46. Боковые грани этой треугольной пирамиды являются равнобедренными треугольниками.

6.47. У треугольника ABC AC — основание, у равностороннего треугольника MNK основанием может считаться любая сторона.

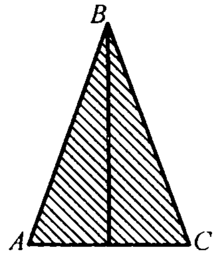


Рис. 6.63

6.48. $4 + 2x = 10$, $2x = 6$, $x = 3$

Боковая сторона равна 3 см.

6.49. 1) $AB = 8$ см, $BC = 11$ см, $AC = 11$ см; 2) $AB = 8$ см, $BC = 8$ см, $AC = 14$ см.

6.50. *Решение.*

$$\left.\begin{array}{l} 1.\ ABC\text{—равнобедренный} \\ \text{треугольник} \\ AC\text{ — основание треугольника} \\ 2.\ 2AC = AB \\ 3.\ P_{\Delta ABC} = 50\text{ см.} \end{array}\right\}\text{(дано) (рис. 6.63)}$$

4. Найти стороны ΔABC.

5. Пусть $AB - x$, тогда $BC = x$, $AC = \dfrac{x}{2}$. (1, 2, 3)

6. $x + x + \dfrac{x}{2} = 50$ (1, 2, 3, 4, 5).

7. $x = 10$ (6).

8. $AC = 10$ см, $AB = 20$ см, $AB = BC = 20$ см. (4, 7)

6.51. $AB = BC = 5$ см, $AC = 3$ см.

6.52. Пусть x — основание, тогда $3x$ — боковые стороны.

Ответ. 3 см основание, 9 см — боковые стороны.

6.53. Основание треугольника не может быть равно 250 см, т.к. 250 должно быть меньше $100 + 100 = 200$.

Значит, основание треугольника должно равняться 100 см, а боковые стороны по 250 см.

6.54. На глаз мы можем говорить, что равнобедренными треугольниками будут треугольники 2, 5.

6.55. Равнобедренные треугольники: ΔLRM основание LM, боковые стороны RL и RM; ΔKPT основание KT боковые стороны PK и PT; ΔSON основание SN; боковые стороны OS и ON; ΔSRT основание ST; боковые стороны RS и RT.

6.56. Равнобедренные треугольники: ΔXHY основание XY, боковые стороны HX и HY; ΔQHW основание QW боковые стороны HQ и HW; ΔXHQ основание XQ; боковые стороны HX и HQ; ΔYHW основание YW; боковые стороны HY и HW.

6.57. *Решение.* а). Возможно, что стороны треугольника 5 см, 5 см, 3 см, а также 3 см, 3 см, 5 см. Так как в обоих случаях выполняется неравенство треугольника.

б). 10 см, 10 см, 5 см, другие варианты невозможны, так как не выполняется неравенство треугольника.

в). Треугольник может быть равносторонним, или иметь третью сторону любой длины, меньшей 22 см, так как в этом случае выполняется неравенство треугольника.

6.58. *Решение.*

На рисунке изображены следующие треугольники: ΔABC, ΔADC, ΔCDD_1, ΔCC_1D_1, ΔADD_1, ΔAA_1D_1, ΔACD_1, ΔADE, ΔADE_1, ΔAEE_1, ΔDE_1C.

Равнобедренные треугольники: ΔABC, ΔADC, ΔCDD_1, ΔCC_1D_1, ΔADD_1, ΔAA_1D_1.

Равносторонние треугольники: ΔACD_1.

6.61. *Решение.* Используя определение равностороннего треугольника, мы знаем, что стороны равностороннего треугольника равны. Значит, на каждую сторону треугольника должно приходиться одинаковое количество спичек. В первом случае 6 : 3 = 2 спички, а во втором случае 9 : 3 = 3 спички.

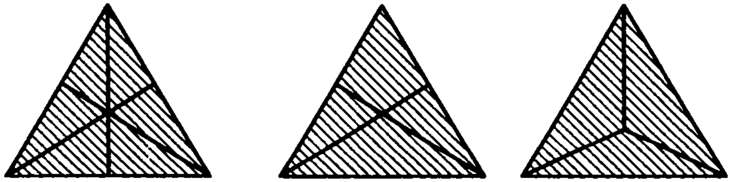
6.62. Ответ. 12 равносторонних треугольников.

6.63. 15 равносторонних треугольников.

6.64. *Решение.* 1. Проведем 3 оси симметрии треугольника. Получим 6 равных прямоугольных треугольников (рис. 6.64, *а*).

2. Проведем 2 оси симметрии (рис. 6.64, *б*), получим 4 части.

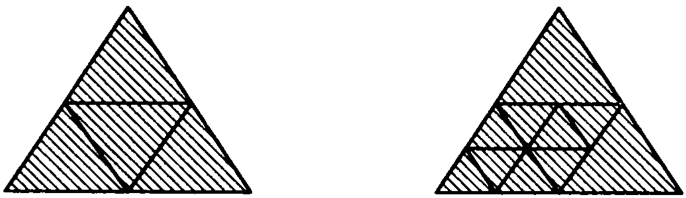
3. Проведем 3 оси симметрии до их точки пересечения (рис. 6.64, *в*), получим три равные части.



а) *б)* *в)*

Рис. 6.64

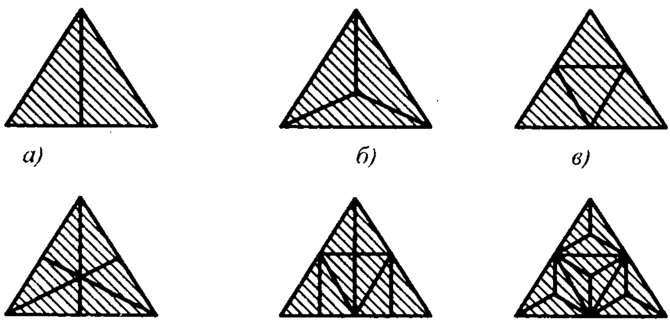
6.65. Для того чтобы разрезать равносторонний треугольник на 4 равных равносторонних треугольника, нужно соединить отрезками середины его сторон (рис. 6.65, *а*). Возьмем 2 из полученных четырех равносторонних треугольников и, поделив каждый из них на 4 равносторонних треугольника, получаем 8 маленьких равносторонних треугольника. Итак, общее количество равных равносторонних треугольников 10. (рис. 6.65, *б*).



а) *б)*

Рис. 6.65

6.66. Смотрите рис. 6.66, *а–е*.



а) *б)* *в)* *г)* *д)* *е)*

Рис. 6.66

6.67. *Решение*. См. рис. 6.67.

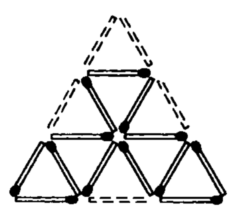


Рис. 6.67

Глава 7
ОКРУЖНОСТЬ И КРУГ

7.1. ОПРЕДЕЛЕНИЯ ОКРУЖНОСТИ И КРУГА

7.4. 1) Нет. 2. Да.

7.5. а) Да. б) Нет. в) Да. г) Да. д) Нет. е) Нет.

7.6. Этот вопрос имеет особенность: надо договориться, что такое радиус: а) радиус — отрезок; б) радиус — длина отрезка.

Если радиус — отрезок, то у окружности есть бесконечное множество радиусов. Если радиус — длина отрезка, то у окружности есть только один радиус.

7.7. Смотрите предыдущую задачу.

7.8. Бесконечное количество.

7.9. Только один.

7.10. Бесконечное множество.

7.11. Диаметр — это хорда, проходящая через центр окружности.

7.12. 5.

7.13. 10 см.

7.14. Окр. (O; 15 мм).

7.15. В случае г) невозможно.

7.16. Можно построить сколько угодно таких окружностей.

7.17. Можно воспользоваться двумя колышками и веревкой.

7.20. $A \notin$ окр. (O, r); $D \in$ окр. (O, r); $L \notin$ окр. (O, r).

7.21. 1. Диаметр можно провести только один. Хорд бесконечное множество. Наибольшей хордой будет диаметр.

2. Диаметр можно провести один, хорд — бесчисленное множество.

7.24. а) Открытый круг, т.е. кр. (O; r) без точек окр. (O; r); б) все точки плоскости без точек, принадлежащих кр. (O; r); в) все точки плоскости без точек, принадлежащих открытому кр. (O; r); г) кр. (O; r) без своего центра.

7.30. Задача сводится к разбиению 10-угольника на треугольники.

1. В любом варианте игры игроки сделают по 5 ходов (10 отрезков — стороны 10-угольника).

2. Остаются возможности внутреннего (диагонального) расположения отрезков.

3. 10 точек зададут 8 треугольников: $8 \cdot 3 = 24$ стороны; 10 из них — это стороны многоугольника ($24 - 10 = 14$), каждая сторона принадлежит двум различным треугольникам ($14 : 2 = 7$), $10 + 7 = 17$ ходов.

4. Выигрывает первый играющий.

Ответ. При правильной игре всегда выигрывает тот, кто делает первый ход.

7.2. ВЗАИМНОЕ РАСПОЛОЖЕНИЕ ПРЯМОЙ И ОКРУЖНОСТИ. ВЗАИМНОЕ РАСПОЛОЖЕНИЕ ОКРУЖНОСТЕЙ

7.33. $OA = OB$.

7.34. MA — касательная к окружности. OM — радиус окружности.

7.35. $O_1A = O_1B$; $O_2A = O_2B$.

7.38. 1. Неверно. 2. Верно.

7.39. а) Часть плоскости, расположенная внутри окружности; б) часть плоскости, расположенная вне окружности; в) часть плоскости, расположенная вне окружности, и сама окружность; г) часть плоскости, расположенная внутри окружности, и сама окружность.

7.40. а) Окружности имеют одну общую точку, т.е. касаются; б) окружности имеют две общие точки, т.е. пересекаются; в) окружности не имеют общих точек, т.е. не пересекаются; г) окружности касаются; д) окружности пересекаются; е) окружности пересекаются, причем каждая окружность проходит через центр второй окружности.

7.42. Окружности имеют две общие точки. Расстояние между их центрами равно радиусу каждой окружности.

7.43. а) Задача имеет решение, если эти окружности пересекаются или касаются (внутренним или внешним образом), т.е. когда $|a - b| < AB < a + b$.

7.44. а) Можно построить две такие окружности; б) в этом случае задача имеет одно решение; в) можно построить две такие окружности.

7.45. а) Можно построить бесконечное множество таких окружностей.

7.46. См. основное теоретическое содержание данного раздела.

7.47. а) Две точки A и B; б) отрезок AB; в) множество внутренних точек отрезка AB; г) лучи с началом в точках A и B, лежащие на прямой AB, находящиеся во внешней области относительно окр. (O; r); д) те же лучи, что и в предыдущем случае, но без точек A и B (открытые лучи); е) прямая AB без двух точек A и B.

7.48. 1. По определению две окружности называются касающимися, если они имеют единственную общую точку.

2. Из этого следует, что общая точка касающихся окружностей находится на прямой, проходящей через центры окружностей, поскольку прямая, проходящая через центры окружностей, является осью симметрии обеих окружностей.

3. Таким образом, если O_1 и O_2 — центры окружностей, A — точка касания, то O_1, O_2 и A лежат на одной прямой, а если центры по разные стороны от A (внешнее касание), то $O_1O_2 = R + r$.

4. Если же они лежат по одну сторону от A (внутреннее касание), то $O_1O_2 = R - r$.

Докажите самостоятельно обратное утверждение, а именно, что если расстояние между центрами окружностей с радиусами R и r равно $R + r$, то окружности касаются внешним образом. Если же оно равно $R - r$, то они касаются внутренним образом.

Замечание. Условие касания двух окружностей можно сформулировать также следующим образом: для того чтобы две окружности касались друг друга, необходимо и достаточно, чтобы они касались одной и той же прямой в одной и той же точке. Более того, последнее условие относится не только к окружностям, но и к произвольным так называемым гладким кривым.

7.51. а) Пересечение двух открытых кр. $(O_1; r_1)$ и кр. $(O_2; r_2)$. б) Все точки плоскости, кроме точек, принадлежащих объединению кр. $(O_1; r_1)$ и кр. $(O_2; r_2)$. в) Все точки плоскости, кроме точек отрезка O_1O_2.

7.52. а) $O_1O_2 = r_1 + r_2$ (рис. 7.8, *а*), $O_1O_2 = r_1 - r_2$ (рис. 7.8, *б*); б) $O_1O_2 < r_1 + r_2$ (рис. 7.8, *в*), $O_1O_2 \le r_1$ (рис. 7.8, *г*); в) $O_1O_2 > r_1 + r_2$ (рис. 7.8, *д*), $O_1O_2 < r_1 - r_2$ (рис. 7.8, *е*).

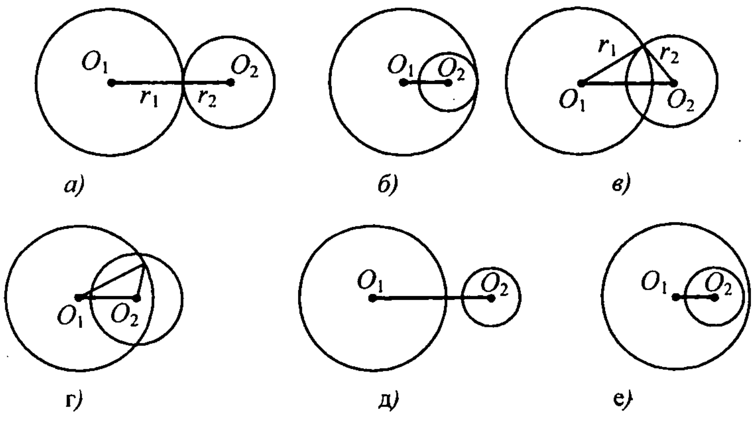


Рис. 7.8

7.53. 1. Расстояние от пункта A до пункта C может быть равным 8 км (рис. 7.9, *а*).

Это наименьшее из возможных значений: $BC = 12$ км, $AB = 20$ км, $AC = AB - BC = 8$ км.

2. Это расстояние может быть равным 32 км (рис. 7.9, *б*)

Это наибольшее из возможных значений $AC = AB + BC = 32$ км.

3. В общем же случае $8 \le AC \le 32$, что следует из неравенства треугольника $AB + BC \ge AC$ (рис. 7.9, *в*).

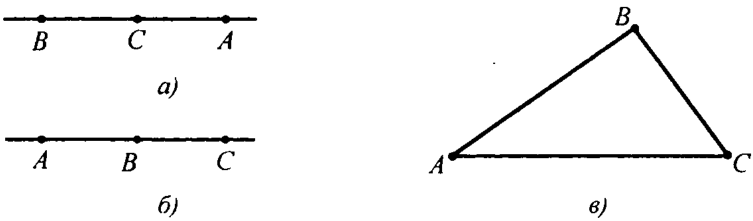


Рис. 7.9

7.54. а) $AB = 9$ км, $AC = CB = BC_1 = C_1A = 10$ км, $AK = K_1B = 1$ км (рис. 7.10, *а*); б) $K_1B = AK = 10$ км (рис. 7.10, *б*).

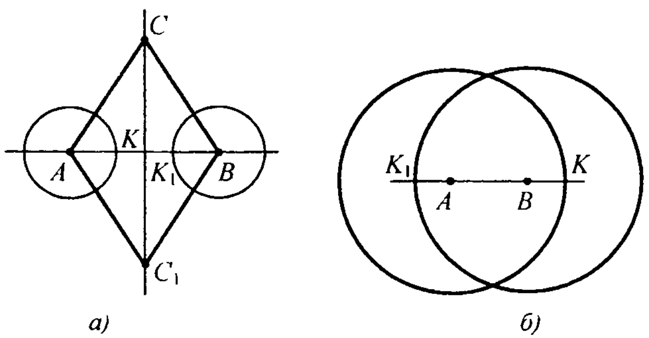


Рис. 7.10

7.64. Условно замените краски числами 1, 2, 3 и начните нумеровать кружочки (с любого), соблюдая условие задачи (два соседних кружка не должны быть одинаково занумерованы). Что получается?

Глава 8
КВАДРАТ И ПРЯМОУГОЛЬНИК

8.1. КВАДРАТ

8.1. Ответ: квадратом является фигура, изображенная на рис. 8.2, *а*. Вершинами квадрата являются точки *A, B, C, D*. Стороны квадрата *AB, BC, CD* и *AD*. Сравнив длины сторон четырехугольника на рис. 8.2, *а* на глаз, можно сказать, что стороны квадрата равны.

8.2. В квадрате можно провести две диагонали. Длины диагоналей квадрата равны (рис. 8.28). Диагональ делит квадрат на два треугольника (рис. 8.29).

8.3. Стороны квадрата, имеющие общую точку, лежат на пересекающихся прямых. Таких сторон 4 пары. Противолежащие стороны квадрата лежат на параллельных прямых. Таких сторон 2 пары.

8.4. Если в квадрате провести диагональ, то мы получим два треугольника *АВД, СВД* (рис. 8.29). Если мы попробуем их наложить друг на друга, то они совпадут. Поэтому мы можем сказать, что эти треугольники равны. Если в квадрате провести две диагонали (рис. 8.30), то мы получим 8 треугольников.

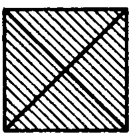


Рис. 8.28

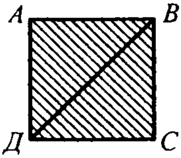


Рис. 8.29

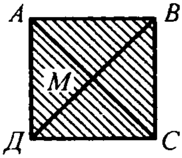


Рис. 8.30

8.5. На рис. 8.3 изображено 5 квадратов.

8.6. *Решение.* 1. Если посмотреть на рис. 8.31, то мы видим 9 маленьких квадратов. Пронумеруем их.

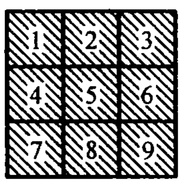


Рис. 8.31

2. Сосчитаем квадраты, состоящие из четырех маленьких квадратов. Их всего 4 (рис. 8.32).

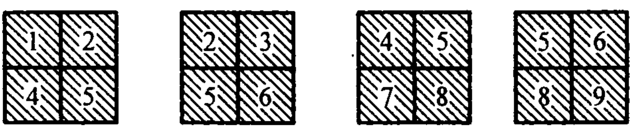
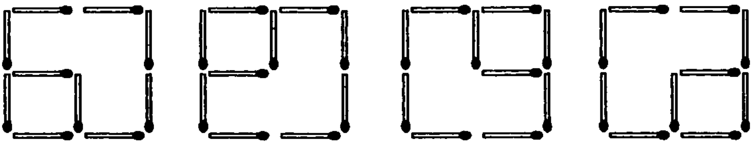


Рис. 8.32

3. У нас есть данный квадрат.

4. Всего получается 9 + 4 + 1 = 14 квадратов.

8.7. 1) Рассмотрим фигуру на рис. 8.5 *а*. Убрать две спички так, чтобы осталось только два квадрата, можно четырьмя способами (рис. 8.33, *а–г*).



а) *б)* *в)* *г)*

Рис. 8.33

2) Рассмотрим фигуру на рис. 8.5, *б*. Для удобства решения обозначим спички цифрами (рис. 8.34).

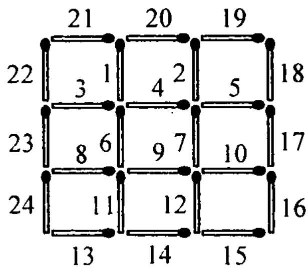


Рис. 8.34

Всего на рис. 8.34 изображено 14 квадратов (девять маленьких, четыре, состоящих из четырех маленьких, и один большой (внешний).

В задаче требуется убрать восемь спичек так, чтобы осталось только два квадрата. Понятно, что это не маленькие квадраты, так как в противном случае пришлось бы убрать больше восьми спичек.

а) Пусть искомые квадраты те, стороны которых составляют две спички.

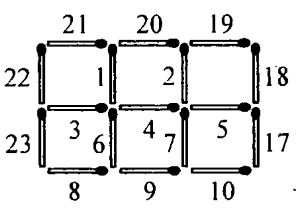


Рис. 8.35

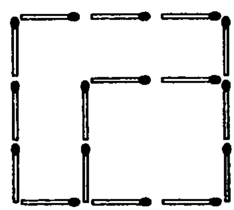


Рис. 8.36

б) Если убрать спички 11, 12, 13, 14, 15, 16, 24, то получается фигура, представленная на рис. 8.35. Осталось восемь квадратов, но было убрано только семь спичек, а требуется убрать восемь спичек. При дальнейшем рассмотрении убеждаемся, что какую бы восьмую спичку мы ни убрали, все равно останется больше двух квадратов. Значит, должны остаться квадраты со стороной в три спички и в две спички, т. е. надо убрать, например, спички 1, 2, 3, 8, 7, 10, 12, 9 (рис. 8.36).

в) Возможны другие варианты рис. 8.9, *а–в*. Также может остаться квадрат со стороной в три спички и в одну спичку (рис. 8.37, *г*).

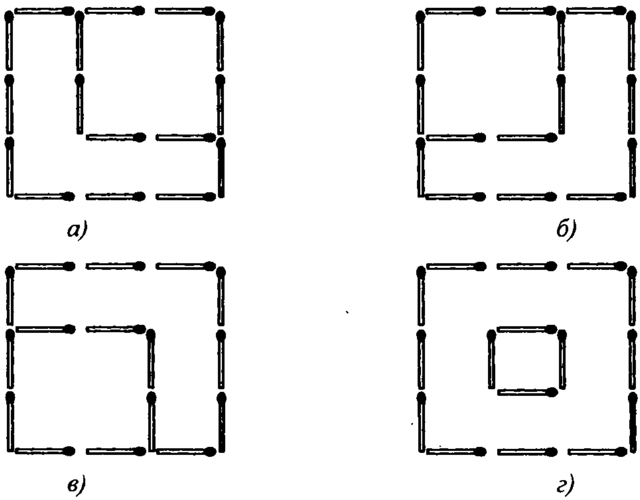


Рис. 8.37

3) В задаче надо убрать шесть спичек так, чтобы осталось три квадрата.

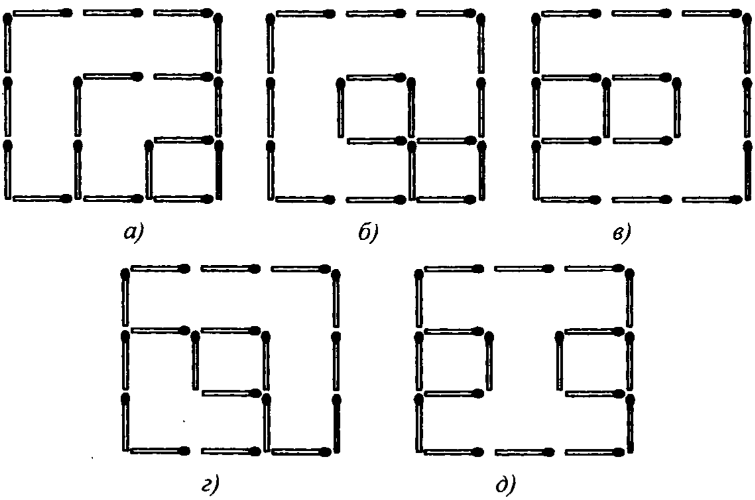


Рис. 8.38

Анализ показывает, что искомые квадраты, как и в предыдущем случае, должны быть разных размеров, в противном случае необходимо убрать больше шести спичек. Возможные варианты решения представлены на рис. 8.38, *а–д*.

В задаче 4) требуется убрать восемь спичек, чтобы осталось четыре равных квадрата.

Данный случай сложнее предыдущего, так как в нем появляется дополнительное условие: остаться должны равные квадраты. Это могут быть только маленькие квадраты, потому что, если оставить, например, квадраты со стороной в две спички, то обязательно появляются взаимопроникающие квадраты. Возможные решения представлены на рис. 8.39.

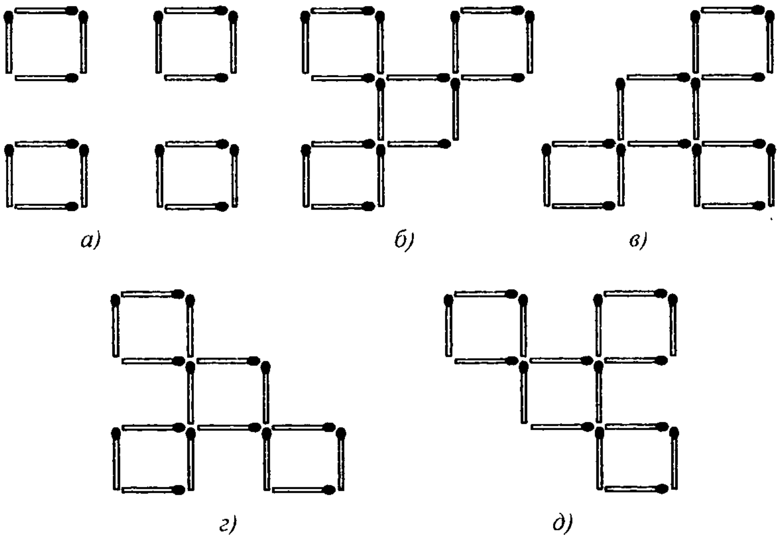
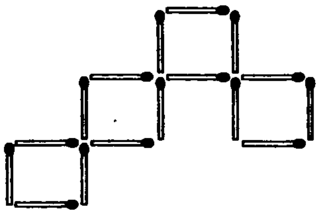


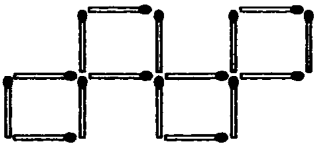
Рис. 8.39

5) В задаче 5 рассматриваются отрезки, изображенные на рис. 8.5, *в*. Требуется убрать десять спичек так, чтобы осталось четыре равных квадрата.

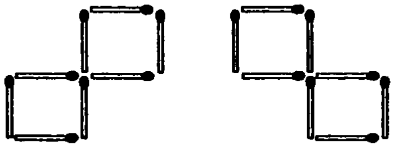
На рис. 8.5 в изображено девять маленьких квадратов и два, состоящих из четырех маленьких квадратов. По условию задачи надо оставить четыре равных квадрата. Это могут быть только маленькие квадраты, причем такие, которые не имеют общей стороны, в противном случае придется убрать больше десяти спичек. Возможные варианты решения представлены на рис. 8.40.



а)



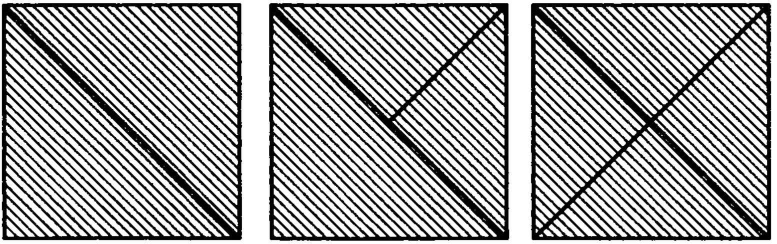
б)



в)

Рис. 8.40

8.8. Составить квадрат из двух треугольников можно (рис. 8.41, *а*), также можно составить квадрат из трех треугольников (рис. 8.41, *б*) и из четырех треугольников (рис. 8.41, *в*).



а) *б)* *в)*

Рис. 8.41

8.9. Для составления квадрата потребуется не менее 7 палочек, поэтому нельзя составить квадрат со стороной менее 7 см. С другой стороны, сумма длин всех палочек равна 45 см, поэтому из них нельзя составить квадрат со стороной более 11 см. Из палочек данного набора можно составить отрезки длиной в 7, 8, 9 см следующими способами:

$7 = 6+1 = 5 + 2 = 4 + 3,$

$8 = 7 + 1 = 6 + 2 = 5 + 3,$

$9 = 8 + 1 = 7 + 2 = 6 + 3 = 5 + 4.$

8.16. 1. Пронумеруем маленькие квадратики (рис. 8.42). Далее работает известный нам алгоритм подсчета квадратов: а) считаем все маленькие квадраты; б) считаем квадраты, составленные из четырех маленьких квадратов; в) считаем квадраты, составленные из 9 маленьких квадратов; г) не забываем добавить данный квадрат.

2. Сосчитаем квадраты, состоящие из четырех рядом лежащих маленьких квадратов. Их всего 9 (рис. 8.42).

3. Сосчитаем квадраты, состоящие из 9 маленьких квадратов. Их всего 4 (рис. 8.42).

4. Имеем также большой квадрат $ABCD$ (рис. 8.42). Всего получаем 30 квадратов.

8.17. Общий принцип покрытия плоскости квадратами виден на рис. 8.43.

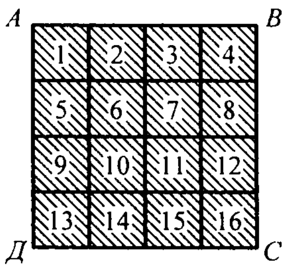


Рис. 8.42

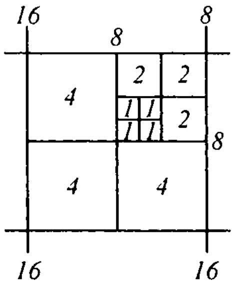


Рис. 8.43

8.18. При решении этой задачи, мы используем результаты решения задач на подсчет квадратов. Для составления квадрата со сторонами в 2 раза больше стороны исходного, надо взять 4 квадрата равных исходному, а в 3 раза больше — 9 квадратов равных исходному.

8.19. 1. Сначала квадрат 4×4 разрежем на 16 квадратов 1×1.

2. Затем каждый из полученных маленьких квадратов разрежем по диагонали на 4 треугольника (рис. 8.44, *а*).

3. Прикладывая большие стороны двух треугольников друг к другу, можно получить по 2 квадрата (рис. 8.44, *б*).

4. Из каждого маленького квадрата мы получаем 2 квадрата.

Всего получаем $16\times2 = 32$ квадрата.

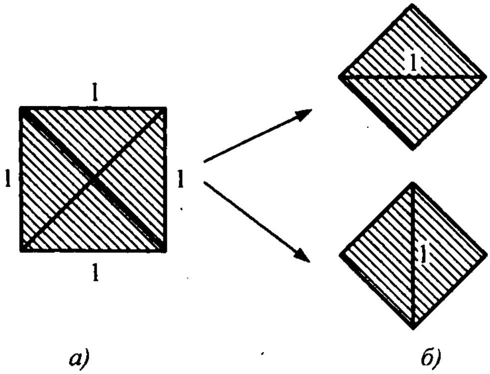


Рис. 8.44

8.20. На рис. 8.45 показано разбиение квадрата на 21 попарно неравных квадратов, придуманное голландским математиком Дьювестином в 1978 году. Цифры указывают длины сторон соответствующих квадратов, если длина исходного — 112. Это построение — своеобразный рекорд: в нем наибольшее пока число попарно неравных квадратов (21).

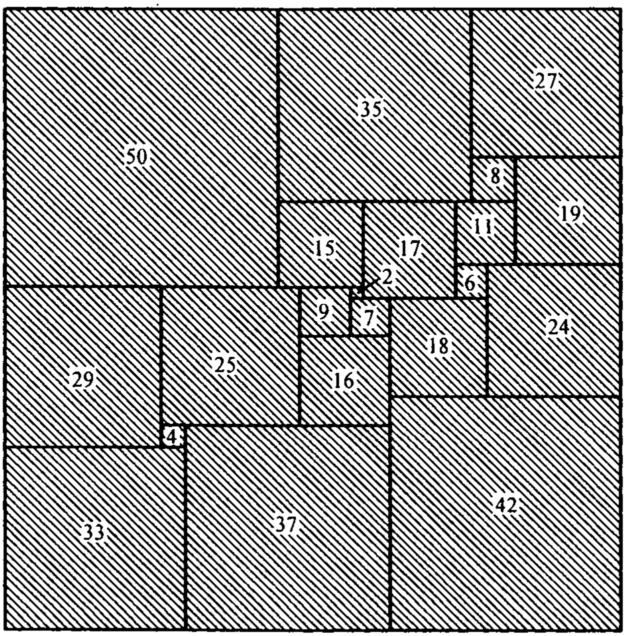


Рис. 8.45

8.21.

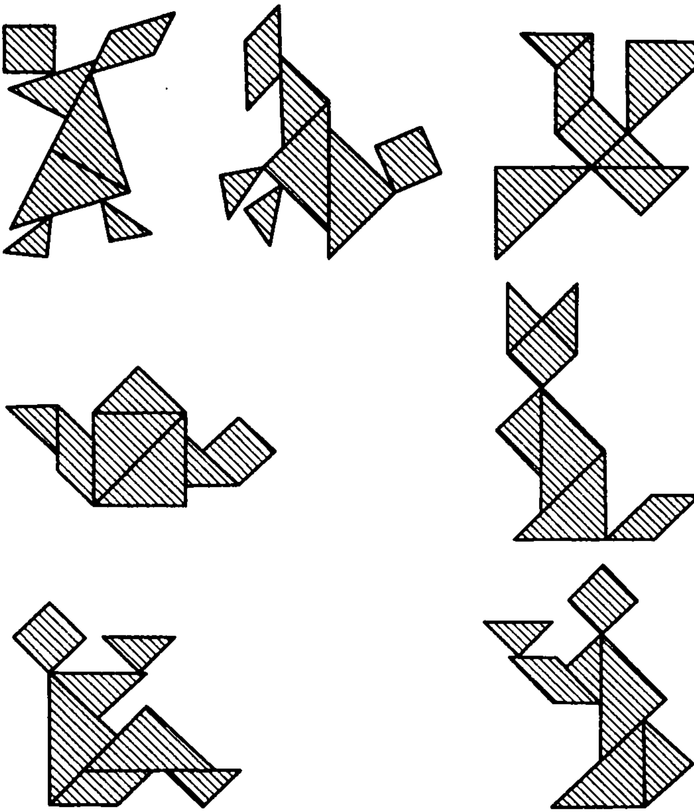


Рис. 8.46

1. На рис. 8.46 показано как составлены искомые фигурки.

3. В данном случае просто по-разному составлены фигурки.

8.22. 3. *Решение.*

1. Пронумеруем квадраты (рис. 8.47).

2. Сторона квадрата 1 в 2 раза больше стороны черного квадрата, то есть ее длина равна 2.

3. Длина стороны квадрата 2 равна сумме длины стороны квадрата 1 и черного квадрата, то есть 1 + 2 = 3.

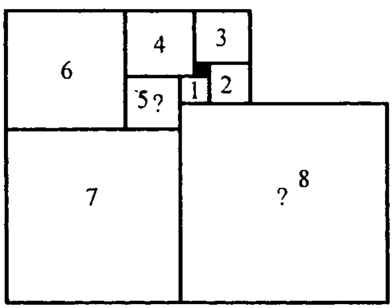


Рис. 8.47

4. Сторона квадрата 3 равна сумме длины квадрата 2 и черного квадрата, 1 + 3 = 4.

5. Сторона квадрата 4 равна сумме длины сторон квадрата 3 и черного квадрата, 4 + 1= 5.

6. Сторона квадрата 4 равна длине стороны квадрата 5 и половине длины стороны квадрата 1, то есть 1, тогда длина стороны квадрата 5 равна разности 5 – 1 = 4. Мы нашли первую величину.

7. Длина стороны квадрата 6 равна сумме длины сторон квадратов 4 и 5, 5 + 4 = 9.

8. Длина стороны квадрата 7 равна сумме длины сторон квадратов 5 и 6, 4 + 9 = 13.

9. Длина стороны квадрата 8 равна сумме длины стороны квадрата 7 и половины длины стороны квадрата 5, 13 + 2 = 15. Получили вторую требуемую величину.

Ответ: 4 и 15.

8.2. ПРЯМОУГОЛЬНИК

8.23. У прямоугольника 4 вершины, 4 стороны и 4 угла. Все его углы прямые, а противоположные стороны равны и параллельны.

8.24. У прямоугольника, в отличие от квадрата, стороны попарно равны.

8.25. Ответ: стороны прямоугольника, имеющие общую точку, лежат на пересекающихся прямых. Таких сторон 2 пары. Противолежащие стороны прямоугольника лежат на параллельных прямых. Таких сторон 2 пары.

8.26. Ответ: в прямоугольнике можно провести две диагонали. Длины диагоналей равны.

8.27. Можно увидеть четыре «больших» равных треугольника. Кроме того, мы видим четыре «маленьких» (рис. 8.48, *а*).

8.28. На рис. 8.48, *б* у четырехугольника $ABCD$ имеется два прямых угла $\angle A$ и $\angle D$, но он не является прямоугольником.

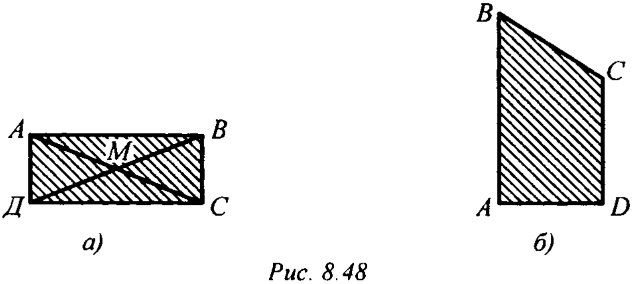


Рис. 8.48

8.29. У четырехугольника $ABCD$ диагонали AC и DB равны, но он не является прямоугольником (рис. 8.49).

8.30. Если в прямоугольнике провести диагональ, то мы получим два треугольника *АВД*, *СВД* (рис. 8.50). Если мы попробуем их наложить друг на друга, то они совпадут. Поэтому мы можем сказать, что эти треугольники равны.

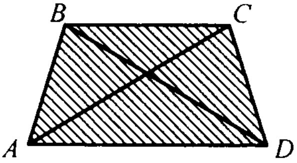


Рис. 8.49

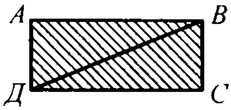


Рис. 8.50

8.31. *Решение.* 1. Пронумеруем все маленькие прямоугольники (рис. 8.51, *а*).

2. Сосчитаем все маленькие прямоугольники. Их всего 4. (1, 2, 3, 4) (рис. 8.51, *а*).

в) Сосчитаем прямоугольники, состоящие их двух маленьких прямоугольников. Их всего 4 (1—2, 4—3, 1—4, 2—3) (рис. 8.51, *б*).

3. Есть данный прямоугольник.

Всего получилось: 4 + 4 + 1 = 9 прямоугольников.

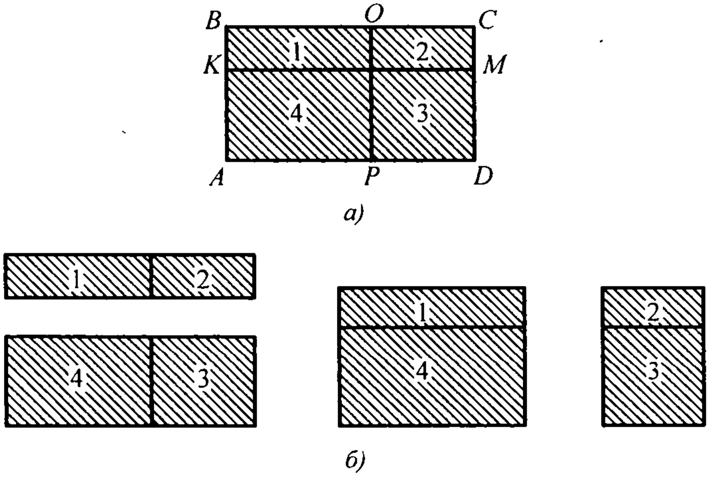


Рис. 8.51

8.32. Пронумеруем все прямоугольники на рис. 8.52. У нас есть данный прямоугольник *ABCD,* маленькие прямоугольники, прямоугольники, составленные из двух маленьких, прямоугольники, составленные из трех маленьких и т.д.

8.33. Особенность этой задачи это то, что здесь на рис. 8.19 есть и прямоугольники и квадраты.

8.34. 1. Пронумеруем фигуры на рис. 8.20.

2.Подсчитаем количество маленьких квадратов: 1, 2, 3, 4, 5, 6— 7, 8, 9—10. Их всего 8.

3. Подсчитаем количество квадратов со сторонами в два раза большими: 1—2—4—5, 5—6—7—2—3, 6—7—8—3—9—10, 12—11, 14—15—13—16, 13—15—12. Их 6.

4. Далее рассмотрим квадраты, у которых стороны в 3 раза больше сторон маленьких квадратов: 14—16—13—15—12—4—5—6—7, 15—13—12—11—5—6—7—8.

5. Прибавим большой квадрат.

6. Итого получаем 8 + 6 + 2 + 1 = 17 квадратов (рис. 8.20).

8.35. Нет, так как число 23 нельзя представить в виде суммы пятерок и семерок.

8.36. Рис. 8.53. Получится квадрат со стороной 6 единиц.

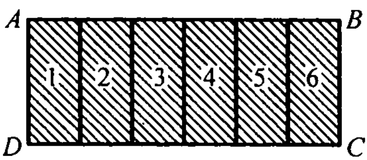


Рис. 8.52

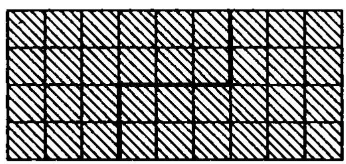


Рис. 8.53

8.37.

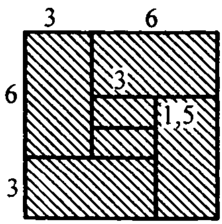
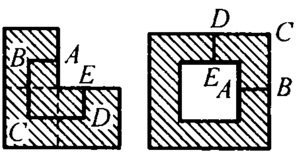


Рис. 8.54

8.38. Данную на рис. 8.22 фигуру надо разрезать по линии *ABCDE* (рис. 8.55, *а*), где *B, C* и *D* — центры квадратов, составляющих данную фигуру.

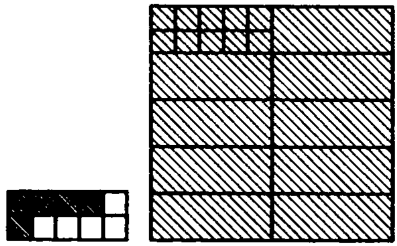
Приложив отрезанную часть к оставшейся, как показано на рис. 8.55, *б*, получим искомый квадрат с отверстием.

8.40. Из данных фигурок сначала можно сложить прямоугольник 2×5, как показано на рис. 8.56, *а*, а затем из 10 прямоугольников 2×5 сложить квадрат 10×10, он изображен на рис. 8.56, *б* справа.



а) *б)*

Рис. 8.55



а) *б)*

Рис. 8.56

8.41. Рис. 8.57. Обведенный на рис. 8.57 камень нужно повернуть на 90°.

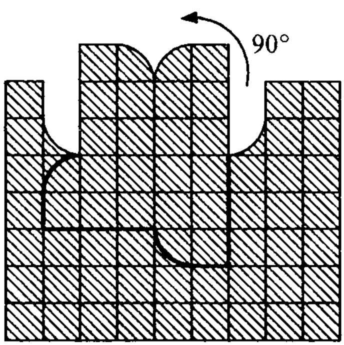
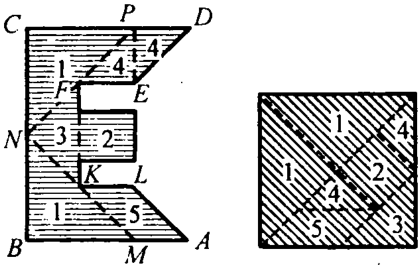


Рис. 8.57

8.42. Решение представлено на рис. 8.58. Линии разрезов показаны пунктиром. Равные части обозначены одинаковыми цифрами.

Для нанесения линии разреза *MN* отложите на стороне *AB* отрезок $AM = KL$ и проведите прямую через точка *M* и *K*. Для нанесения линии разреза *NP* проведите прямую через точки *N* и *F*. Построение остальных линий разреза ясно из чертежа. Если фигура была вычерчена правильно, то угол *MNP* окажется прямым, а отрезки *MB*, *BN*, *NC* и *CP* — равными.

8.43. Решение изображено на рис. 8.59.



а) *б)*

Рис. 8.58

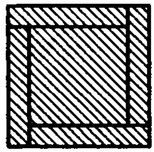
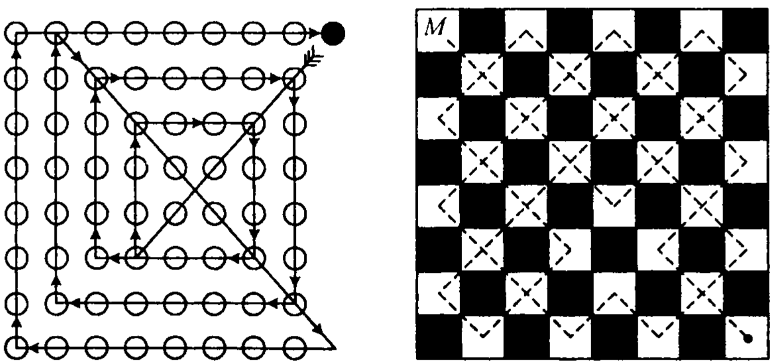


Рис. 8.59

8.44. Маршрут девочки представлен на рис. 8.60, *а*. Черной точкой отмечено место старта и финиша движения фигуристки.

Маршрут мальчика представлен на рис. 8.60, *б*. Старт отмечен буквой *М*, а финиш — точкой.



а) *б)*

Рис. 8.60

Список используемой литературы

1. *Барр Стефан.* Математический цветник. — М.: Мир, 1983.

2. *Колмогоров А.Н., Гусев В.А., Семенович А.Ф., Черкасов Р.С.* Геометрия 8 класс. Учебное пособие. — М.: Просвещение, 1974. — 112 с.

3. *Варданян С.С.* Задачи по планиметрии с практическим содержанием. Под ред. Гусева В.А. — М.: Просвещение, 1988. — 128 с.

4. *Гусев В.А., Маслова Г.Г., Нагибин Ф.Ф., Семенович А.Ф., Черкасов Р.С.* Геометрия в 6 классе. В помощь учителю. Под ред. А.Н.Колмогорова. — М.: Просвещение, 1972. — 126 с.

5. *Гусев В.А., Маслова Г.Г., Семенович А.Ф., Черкасов Р.С.* Геометрия в 8 классе. Методическое пособив к учебнику геометрии под ред. А.Н.Колмогорова. — М.: Просвещение, 1972. — 56 с.

6. *Гусев В.А., Маслова Г.Г., Семенович А.Ф., Нагибин Ф.Ф., Черкасов Р.С.* Дидактические материалы по геометрии для 6 класса. — М. : Просвещение, 1972. 142 с.

7. *Гусев В.А., Маслова Г.Г., Нагибин Ф.Ф., Семенович А.Ф., Черкасов Р.С.* Геометрия в 7 классе. — М.: Просвещение, 1973. — 174 с.

8. *Гусев В.А., Маслова Г.Г., Нагибин Ф.Ф., Семенович А.Ф., Черкасов Р.С.* Дидактические материалы по геометрии для 7 класса. — М.: Просвещение, 1973. — 128 с.

9. *Гусев В.А., Маслова Г.Г., Семенович А.Ф., Черкасов Р.С.* Геометрия в 8 классе. Пособие для учителей. — М.: Просвещение, 1974. — 160 с.

10. *Гусев В.А., Маслова Г.Г., Семенович А.Ф., Черкасов Р.С.* Дидактические материалы по геометрии для 8 класса. — М.: Просвещение, 1974. — 128 с.

11. *Гусев В.А.. Маслова Г.Г., Скопец З.А., Черкасов Р.С.* Сборник задач по геометрии для 6–8 классов. — М.: Просвещение, 1975. — 224 с.

12. *Гусев В.А., Колягин Ю.М., Луканкин Г.Л.* Векторы в школьном курсе математики. — М.: Просвещение, 1976. — 48 с.

13. *Гусев В.А., Орлов А.И., Розенталь А.Д.* Внеклассная работа по математике для 6–8 классов. Под ред. С.И. Шварцбурда. — М, : Просвещение, 1977. — 288 с.

14. *Абрамов А.М., Гусев В.А., Маслова Г.Г., Семенович А.Ф., Черкасов Р.С.* Геометрия в 6 классе. — М.: Просвещение, 1980. — 112 с.

15. *Гусев В.А., Маслова Г.Г., Семенович А.Ф., Черкасов Р.С.* Дидактические материалы по геометрии для 6 класса. — М.: Просвещение, 1980. — 62 с.

16. *Абрамов А.М., Гусев В.А., Маслова Г.Г., Семенович А.Ф., Черкасов Р.С.* Геометрия в 7 классе . — М.: Просвещение, 1981. — 144 с.

17. *Гусев В.А., Маслова Г.Г., Семенович А.Ф., Черкасов Р.С.* Дидактические материалы по геометрии для 7 класса. — М.: Просвещение, 1981. — 80 с.

18. *Гусев В.А., Иванов А.И., Шебалин О.Д.* Изучение величин на уроках математики м физики. — М.: Просвещение, 1981. — 80 с.

19. *Гусев В.А., Маслова Г.Г.* Дидактические материалы по геометрии для 9 класса. — Изд. 2-е. — М.: Просвещение, 1983. — 64 с.

20. *Гусев В.А., Маслова Г.Г., Скопец З.А., Ягодовский М.И.* Дидактические материалы по геометрии для 10 класса. Изд. 3-е, перераб. — М.: Просвещение, 1984. — 96 с.

21. *Гусев В.А., Орлов А.И., Розенталь А.Л.* Внеклассная работа по математике для 6–8 классов. Изд. 2-е, перераб. Под ред. С. И. Шварцбурда. — М.: Просвещение, 1984. — 286 с.

22. *Гусев В.А., Медяник А.И.* Задачи по геометрии для 6 класса. Дидактические материалы. — М.: Просвещение, 1984. — 64 с.

23. *Возняк Г.М., Гусев В.А.* Прикладные задачи на экстремум. — М. Просвещение, 1985. — 144 с.

24. *Гусев В.А., Медяник А.И.* Задачи по геометрии для 7 класса. Дидактические материалы. М. : Просвещение, 1986. — 68 с.

25. *Гусев В.А., Медяник А.И.* Задачи по геометрии для 8 класса. Дидактические материалы. — М.: Просвещение, 1987. — 80 с.

26. *Гусев В.А., Медяник А.И.,* Задачи по геометрии для 6 класса. Изд. 2-е, переработанное. — М.: Просвещение, 1988. — 64 с.

27. *Гусев В.А., Медяник А.И.* Задачи по геометрии для 8 класса. Изд. 2-е. — М.: Просвещение, 1989. — 64 с.

28. *Гусев В.А., Медяник А.И.* Задачи по геометрии для 9 класса. Изд. 2-е. — М.: Просвещение, 1990. — 80 с.

29. *Гусев В.А., Мордкович А.Г., Литвиненко В.Н.* Практикум по решению математических задач. Геометрия. — М.: Просвещение, 1985. — 224 с.

30. *Гусев В.А.* Геометрия 6. Экспериментальный учебник. Ч. I–II. — М.: Авангард, 2000. — 275 с.

31. *Гусев В.А.* Геометрия 7 (6). Экспериментальный задачник. — М.: Авангард 2000. — 218 с.

32. *Гусев В.А.* Геометрия 7 (6). Экспериментальный учебник. — М.:Авангард, 2000. — 218 с.

33. *Гусев В.А.* Геометрия 7. Экспериментальный учебник. Ч. III. — М.: Авангард, 1999. — 96 с.

34. *Гусев В.А.* Геометрия 7. Экспериментальный учебник. Ч. IV. — М.: Авангард, 1999. — 128 с.

35. *Гусев В.А.* Геометрия 8. Экспериментальный учебник. Ч. V. — М.: Авангард, 1997. — 163 с.

36. *Гусев В.А.* Геометрия 8. Экспериментальный учебник. Ч. VI. — М.: Авангард, 2000. — 140 с.

37. *Гусев В.А.* Геометрия 9. Экспериментальный учебник. Ч. VII. — М.: Авангард, 2001. — 172 с.

38. *Гусев В.А.* Геометрия 9. Экспериментальный учебник. Ч. VIII. — М.: Авангард, 1999. — 148 с.

39. *Гусев В.А.* Геометрия 10–11. Экспериментальный учебник. Ч IX. — М.: Авангард, 1999. — 174 с.

40. *Гусев В.А.* Геометрия. 5–6 классы: учебное пособие. — 2-е изд., испр. и доп. — М.: Русское слово, 2005. — 240 с.

41. *Гусев В.А.* Геометрия. 5–6 классы: учебное пособие. — М.. Русское слово, 2002. — 256 с.

42. *Гусев В.А.* Геометрия. 7 класс. — М.: Русское слово, 2003 — 240 с.

43. *Гусев В.А.* Изменения, внесенные в учебник Н. Н. Никитина «Геометрия для 6–8 классов» // Математика в школе — 1969 — № 4.

44. *Гусев В.А.* Как помочь ученику полюбить математику? Ч. 1 — М.: Авангард, 1994. — 168 с.

45. *Гусев В.А.* Каким должен быть курс школьной геометрии // Математика в школе. — 2002. — № 3. — С. 4–8.

46. *Гусев В.А.* Методика преподавания курса «Геометрия 6–9» Ч. 1 — М.: Авангард, 1995. — 100 с.

47. Гусев В.А. Методика преподавания курса «Геометрия 6–9» Ч. 2 — М.: Авангард, 1996. — 127 с.

48. *Гусев В А.* Методика преподавания курса «Геометрия 6–9» Ч. 3 — М.: Авангард, 1997. — 137 с.

49. *Гусев В.А.* Программа курса «Геометрия» для 5–11 классов общеобразовательных учреждений. — М.: Русское слово, 2002. — 32 с.

50. *Гусев В.А.* Психолого-педагогические основы обучения математике. — М.: Вербум-М, 2003. — 432 с.

51. *Гусев В.А.* Сборник задач по геометрии. 5–9 кл.: учеб. пособие для общеобразоват. учреждений / В. А. Гусев. — М.: Мир и образование, 2005. — 480 с.

52. *Гусев В.А., Замаховский М. П., Назиев А. Х.* Математический словарь для школьников. Сдай экзамены на «пять»! — Ростов н/Д: Феникс, 2004. — 379 с.

53. *Гусев В.А., Комбаров А. П.* Математическая разминка: кн. для учащихся 5–7 кл. — М.: Просвещение, 2005. — 94 с

54. *Гусев В.А., Литвиненко В. Н., Мордкович А. Г.* Практикум по решению математических задач. Геометрия: учеб. пособие для студентов физ.-мат. спец. пед. ин-тов. — М.: Просвещение 1985 — 223 с.

55. *Гусев В.А.*, Кожухов И.Б., Прохоров А.А. Геометрия. Полный справочник. — М.: Махаон, 2006.

56. *В.А. Панчищина Э.Г. Гельфан, В.Н. Ксенева, Н.Б. Лобаненко.* Геометрия для младших школьников: В 3 ч. — Томск: Изд-во Том. ун-та, 1997.

57. *Кордемский Б.А.* Математическая смекалка. — М.: 1954.

58. *Клековкин Г. А.* Геометрия, 5–6. — М.: Русское слово, 2000.

59. *Лановок Л.М.* Тысяча проблемных задач по математике. — М.: Просвещение, 1995.

60. *Левитас Г.Г.* Геометрия на плоскости и в пространстве. Ч. 1–2. — М.: Авангард, 1996.

61. *Н.Я. Виленкин.* Математика. 5 класс: учеб. для общеобразоват. учреждений. — М.: Мнемозина, 2005. — 279 с.

62. *Л.Г. Петерсон, Г.В. Дорофеев.* Математика. 5 класс: учеб. для общеобразоват. учреждений. — М.: Ювента, 2005. — 240 с.

63. *Н.Б. Истомина.* Математика. 5 класс: учеб. для общеобразоват. учреждений. — М.: Линка-пресс, 1998. — 239 с.

64. Математика. 5 класс: учеб. для общеобразоват. учреждений / под ред. Г.В. Дорофеева, И.Ф. Шарыгина. — 8-е изд. — М.: Просвещение, 2006. — 301 с.

65. *Н.Я. Виленкин.* Математика. 6 класс: учеб. для общеобразоват. учреждений. — М.: Мнемозина, 2005. — 287 с.

66. *Л.Г. Петерсон, Г.В. Дорофеев.* Математика. 6 класс: учеб. для общеобразоват. учреждений. — Ч. 1–2. — М.: Ювента, 2004.

67. *Н.Б. Истомина.* Математика. 6 класс: учеб. для общеобразоват. учреждений. — М.: Ассоциация XXI век, 2002. — 208 с.

68. Математика. 6 класс: учеб. для общеобразоват. учреждений / под ред. Г.В. Дорофеева, И.Ф. Шарыгина. — 8-е изд. — М.: Просвещение, 2006. — 301 с.

69. *Мот Э.Э., Даунс Ф.Л.* Геометрия / пер с англ. И. А. Вайштейна; под ред. И. М. Яглома. — М.: Просвещение, 1972. — 622 с.

70. *В.А. Панчищина, Э. Г. Гельфман, В. Н. Ксенева и др* Наглядная геометрия: учебное пособие для 5–6 классов общеобразоват. учреждений. — М.: Просвещение, 2006. — 175 с.

71. *Подходова Н С.* Геометрия в пространстве: Знакомство с объемными фигурами и симметрией. 6, 7–9 классы. — СПб: Голанд, 1996. — 143 с.

72. *Подходова Н.С.* Геометрия. 5 класс: учеб. пособие. — СПб.: Дидактика, 1995. — 133 с.

73. *Ходот Т.Г.* и др. Геометрия: учебник для 5 класса общеобразовательной школы. — СПб.: Иван Федоров, 2002. — 272 с.

74. *Ходот Т.Г.* и др. Геометрия: учебник для 6 класса общеобразовательной школы. — СПб.: Иван Федоров, 2002. — 304 с.

75. *Пышкало А.М.* Геометрия в I–IV классах. — М.: Просвещение, 1988.

76. *Пелерман Я.И.* Занимательные задачи. — М.: 2001.

Справочное издание

Гусев Валерий Александрович

МАТЕМАТИКА
Сборник геометрических задач
5–6 классы

Издательство ***«ЭКЗАМЕН»***

Гигиенический сертификат
№ 77.99.60.953.Д.007297.05.10 от 07.05.2010 г.

Главный редактор *Л.Д. Лаппо*
Редактор *И.М. Бокова*
Технический редактор *Т.В. Фатюхина*
Корректор *Т.И. Шитикова*
Дизайн обложки *М.Н. Ершова*
Компьютерная верстка *Е.Ю. Лысова*

105066, Москва, ул. Нижняя Красносельская, д. 35, стр. 1.
www.examen.biz
E-mail: по общим вопросам: info@examen.biz;
по вопросам реализации: sale@examen.biz
тел./факс 641-00-30 (многоканальный)

Общероссийский классификатор продукции
ОК 005-93, том 2; 953005 — книги, брошюры, литература учебная

Текст отпечатан с диапозитивов
в ОАО «Владимирская книжная типография»
600000, г. Владимир, Октябрьский проспект, д. 7

Качество печати соответствует
качеству предоставленных диапозитивов

**По вопросам реализации обращаться по тел.:
641-00-30 (многоканальный).**